

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2016
- الموضوع -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم
والامتحانات والتوجيه



NS 24

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(7 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

1+AJ

التمرين الأول: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

لكل (x, y) من \mathbb{R}^2 نضع: $M(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$ و $E = \{M(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$ 0.5

2- تحقق أن: 0.5

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) (\forall (x', y') \in \mathbb{R}^2) : M(x, y) \times M(x', y') = M(xx' - yy', xy' + yx')$$

3- نضع $E^* = E - \{M(0, 0)\}$ ونعتبر التطبيق: $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow E$ الذي يربط العدد العقدي $z = x + iy$ بالمصفوفة

$M(x, y)$ من E ، حيث الزوج (x, y) من \mathbb{R}^2

(أ) بين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, \times) 0.25

(ب) استنتج أن (E^*, \times) زمرة تبادلية وأن عنصرها المحايد هو $M(1, 0)$ 0.75

4- بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0.5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5- نضع

(أ) أحسب $A \times M(x, y)$ من أجل $M(x, y)$ عنصر من E 0.5

(ب) استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مائلا في $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ 0.5

التمرين الثاني: (3 نقط)

الجزء الأول: ليكن (a, b) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم $a^3 + b^3$

1- بين أن: $[173] \quad a^{171} \equiv -b^{171}$ (لاحظ أن: $171 = 3 \times 57$) 0.25

2- بين أن: 173 يقسم a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b 0.25

3- نفترض أن 173 يقسم a . بين أن 173 يقسم $a+b$ 0.25

4- نفترض أن 173 لا يقسم a

(أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $[173] \quad a^{172} \equiv b^{172}$ 0.5

(ب) بين أن: $[173] \quad a^{171}(a+b) \equiv 0$ 0.5

(ج) استنتج أن 173 يقسم $a+b$ 0.5

الجزء الثاني: نعتبر في $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ المعادلة التالية: $(E) \quad x^3 + y^3 = 173(xy+1)$

الصفحة 3 4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2016 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	Φ
		ليكن (x, y) عنصرا من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E) ؛ نضع: $x + y = 173k$ ، حيث $k \in \mathbb{N}^*$	
		1- تحقق أن: $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$	0.25
		2- بين أن: $k = 1$ ثم حل المعادلة (E).	0.5
		التمرين الثالث: (3.5 نقط) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و منظم و موجه (O, \vec{u}, \vec{v}) . نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى العقدي بحيث النقطة O و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمة. ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق العلاقة: $z = \frac{2z_1z_2}{z_1 + z_2}$	
		1- بين أن: $\frac{z_1 - z}{z_2 - z} \times \frac{z_2}{z_1} = -1$	0.5
		ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OM_1M_2 .	0.5
		2- بين أنه إذا كانت $z_2 = \overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي.	0.5
		3- نفترض أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه O و قياس زاويته α حيث α ينتمي إلى $]0, \pi[$	
		أ) احسب z_2 بدلالة z_1 و α	0.5
		ب) استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$	0.5
		4- ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من $]0, \pi[$	
		نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا للمعادلة: $6t^2 - (e^{i\theta} + 1)t + (e^{i\theta} - 1) = 0$	
		أ) بدون حساب z_1 و z_2 تحقق أن: $z = 2 \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1}$	0.5
		ب) أعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ .	0.5
		التمرين الرابع: (7 نقط) الجزء الأول:	
		1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t \mapsto e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي	0.5
		θ محصور بين 0 و x بحيث: $e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}}$	
		2- استنتج أن:	
		أ) $(\forall x > 0) ; 1 - x < e^{-x}$	0.25
		ب) $(\forall x > 0) ; x + 1 < e^x$	0.25
		ج) $(\forall x > 0) ; 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right) < x$	0.25
		الجزء الثاني:	
		نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $f(0) = 1$ و $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$ إذا كان $x > 0$	

HAS

- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1-1 (أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 0.5
 (ب) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5
- 1-2 (أ) بين أن: $(\forall x \geq 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq -e^{-x} + 1$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-1 من الجزء الأول) 0.25
 (ب) استنتج أن: $(\forall x \geq 0) \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq e^{-x} + x - 1 \leq \frac{x^2}{2}$ 0.5
- 1-3 (أ) تحقق أن: $(\forall x > 0) \quad \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} f(x)$ 0.5
 (ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{1}{2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها. 0.75
- 1-4 (أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ وأن $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$ 0.75
 (ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-1 من الجزء الأول) 0.5
- الجزء الثالث:**
- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 > 0$ و $u_{n+1} = \ln(f(u_n))$ لكل عدد صحيح طبيعي n
- 1- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n لدينا: $u_n > 0$ 0.5
 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 2-1 ج من الجزء الأول) 0.5
 3- بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة: $\ln(f(x)) = x$ ثم حدد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ 0.5

التمرين الخامس: (3 نقط)

- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$
- 1-1 (أ) أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من I 0.5
 (ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I و احسب $F'(x)$ لكل x من I . 0.5
 (ج) بين أن الدالة F تزايدية قطعاً على المجال I 0.25
- 1-2 (أ) باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع: $u = \sqrt{e^t - 1}$ ، بين أنه لكل x من I لدينا: 0.5

$$\int_{\ln 2}^x \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt = 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} - \frac{\pi}{2}$$
- (ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ 0.5
- 1-3 (أ) بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده. 0.25
 (ب) حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F . 0.5

انتهى

HAT