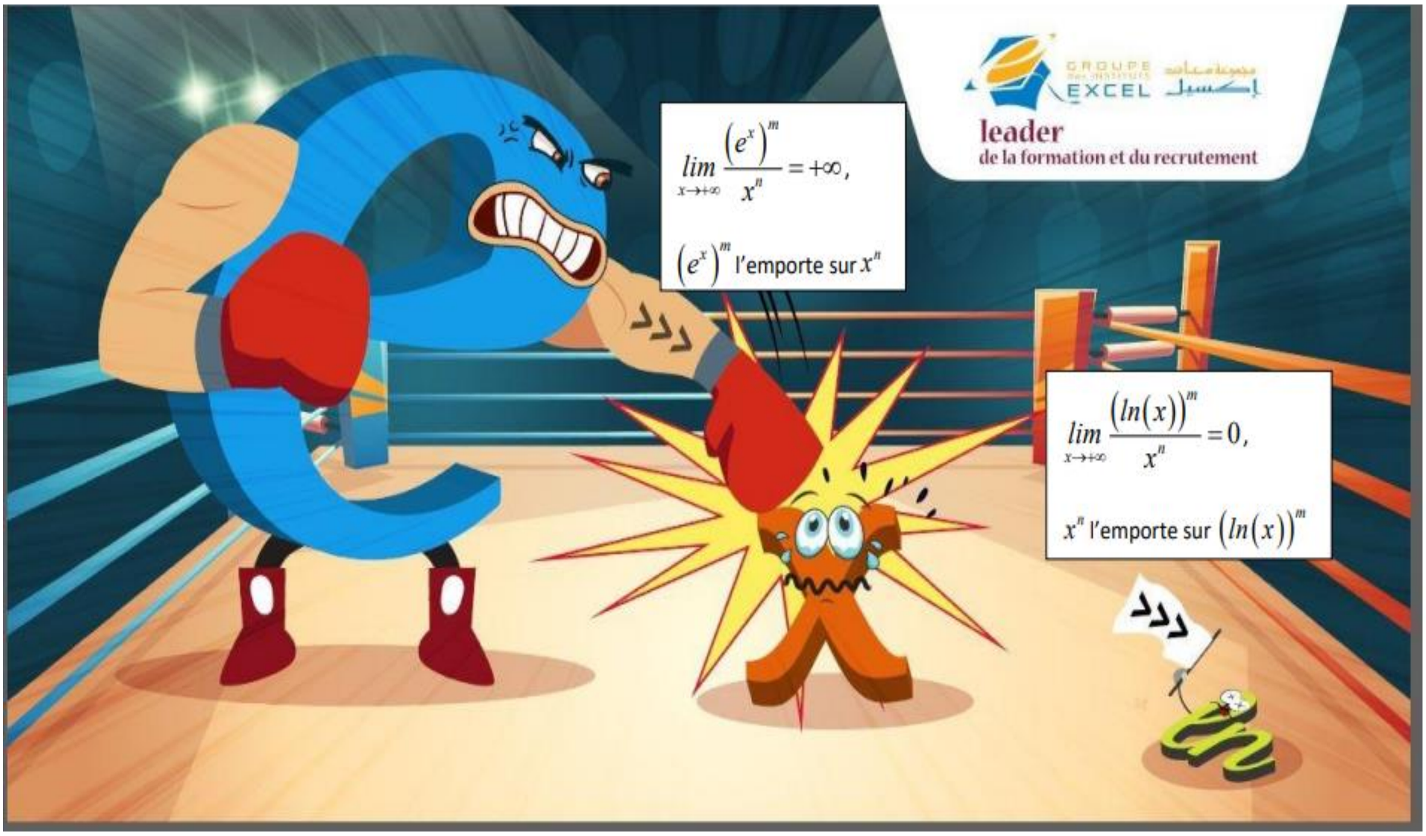
Comparaison des fonctions e^x, x et $ln(x)$

Astuce :



$e^{(\ldots\ldots\ldots)}$

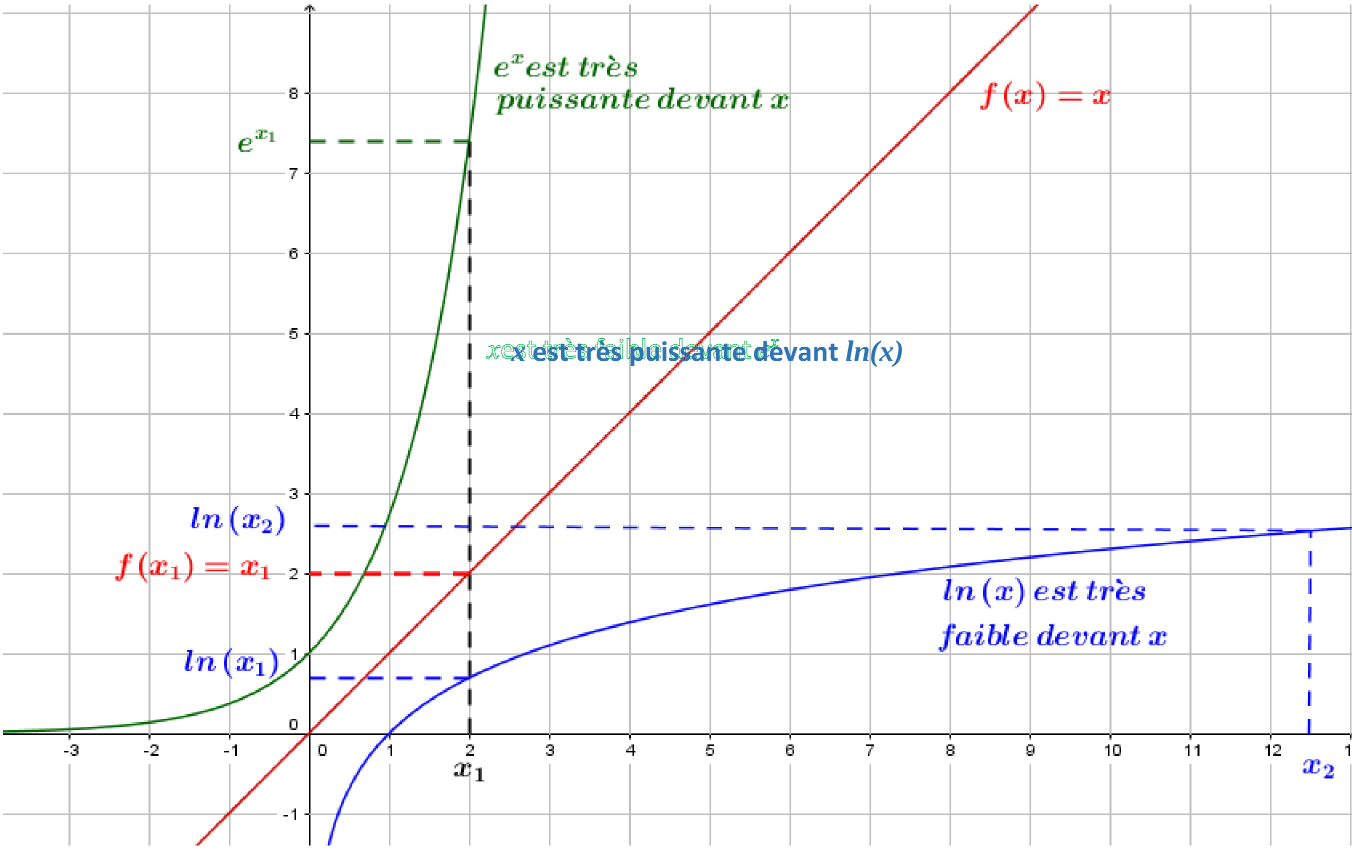
$-\infty$	0	$+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$	Penser à	$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ où $n \in IN^*$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ où $n \in IN^*$

Limites usuelles des fonctions e^x, x et $ln(x)$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$	
Logarithme	**Exponentielle**
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$, x^n l'emporte sur $ln(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, e^x l'emporte sur x^n
Généralement	
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(ln(x))^m}{x^n} = 0$, x^n l'emporte sur $(ln(x))^m$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)^m}{x^n} = +\infty$, $(e^x)^m$ l'emporte sur x^n

Comparaison des fonctions e^x, x et $ln(x)$

Graphiques :



$ln(x)$ est très faible devant x

e^x est très puissante devant x

$$ln(x) <<< x <<< e^x$$

Exemples :

Pour $x_1 = 2$ on a $e^{x_1} \approx 7,39$ et $ln(x_1) \approx 0,69$ donc $\boxed{ln(x_1) << x_1 << e^{x_1}}$; c'est-à-dire :

$ln(x_1 = 2) \approx 0,69 << x_1 = 2 << e^{x_1 = 2} \approx 7,39$.

Pour $x_2 = 12,5$ on a $e^{x_2} \approx 268337,29$ et $ln(x_2) \approx 2,53$

donc $\boxed{ln\left(x_2\right) <<< x_2 <<< e^{x_2}}$ c'est-à-dire : $ln\left(x_2 = 12{,}5\right) \approx 2{,}53 <<< x_2 = 12{,}5 <<< e^{x_2 = 12{,}5} \approx 268337{,}29$.

$ln\left(x_2 = 12{,}5\right)$ est largement plus petit que

$e^{x_2 = 12{,}5}$ estlargement plus grand que x

Calculer :

Exponentielle :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{-2x+6}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x+6}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - e^x + 2\right)$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 3}{e^x}$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x} - 5}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$
11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x} - 1}{3 - e^x}$

Logarithme :

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \ln x\right)$
14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\ln x\right)$
15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - x\right)\ln x$
16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln 2 - 3\ln x\right)$
17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x \ln x - x\right)$
18. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln x^2$
19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x}$
20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \ln x\right)$
21. $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$
22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1 + 2x}{x}\right)$

Plusieurs astuces dans les corrigés des exercices suivantes :

Exponentielle :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x$

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty}$

   puisque on sait, par abus de notation, que $\left(+\infty\right) \times \left(+\infty\right) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{-2x+6}$

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x + 6 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x+6} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{-2x+6} = +\infty}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{-2x+6}$

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x + 6 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x+6} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} 3e^{-2x+6} = +\infty}$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, donc pour $n=2$ on a $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x+2\right)$

On $e^{2x}-e^x+2=e^x\left(e^x-1+\dfrac{2}{e^x}\right)$ puisque $e^{2x}=e^{x+x}=e^x\times e^x$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-1+\dfrac{2}{e^x}\right)=+\infty$

Et puisque on sait, par abus de notation, que $(+\infty)\times(+\infty)=+\infty$ alors $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^x+2\right)=+\infty}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x}$

On a $\dfrac{e^x+3}{e^x}=1+\dfrac{3}{e^x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{3}{e^x}$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{e^x}=1}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-5}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-5=+\infty$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}-5}=+\infty}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

On a $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}=1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1}$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+1=1$

Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1}$

10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}$

On a $\dfrac{xe^x}{e^x-1}=x\dfrac{e^x}{e^x-1}$, or $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=-1$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x\dfrac{e^x}{e^x-1}=+\infty$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=+\infty}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}$

On a $\dfrac{xe^x}{e^x-1}=x\dfrac{e^x}{e^x-1}$ et $\dfrac{e^x}{e^x-1}=\dfrac{e^x}{e^x}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^x}}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}=1$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{e^x-1}=+\infty}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{3-e^x}$

On a $\dfrac{e^{3x}-1}{3-e^x}=\dfrac{e^x\left(e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(\dfrac{3}{e^x}-1\right)}=\dfrac{e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{3}{e^x}-1}$, or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}=+\infty$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$. D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}-1=-1$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{3}{e^x}-1}=-\infty$, d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}-1}{3-e^x}=-\infty}$

Logarithme :

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)=+\infty}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\ln x)=+\infty}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$

On $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x=-\infty}$

puisque on sait, par abus de notation, que $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-3\ln(x)=-\infty$. Or $ln 2$ est constante

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2-3\ln x)=-\infty}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x-x)$

On a $x\ln x-x=x(\ln x-1)$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-1=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x-1)=+\infty$

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln x - x\right) = +\infty}$

18. $\lim_{x\to-\infty} \ln x^2$

On a $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty}$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x}$

On a $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x}$, or $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$ donc $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x} = -\infty$

puisque on sait, par abus de notation, que $(-\infty)\times(+\infty) = -\infty$

20. $\lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln x\right)$

On a $x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$, or $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln x}{x} = 1$

D'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln x\right) = +\infty}$

21. $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$ donc $X \to 0$ quand $x \to +\infty$ donc on a $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\ln(1+X)}{X}$

On sait que $\mathit{lim}_{X\to 0}\dfrac{\mathit{ln}(X+1)}{X} = 1$, d'où $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1}$

22. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+2x}{x}\right)$

On a $\dfrac{1+2x}{x} = \dfrac{1}{x} + 2$, or $\mathit{lim}_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\mathit{lim}_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + 2 = 2$, d'où $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1}{x}+2\right) = \ln 2$

Alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{1+2x}{x}\right)}$