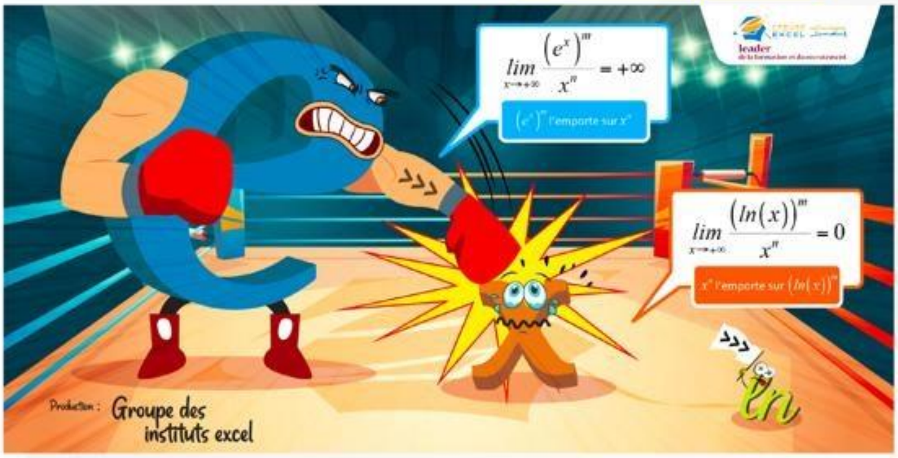
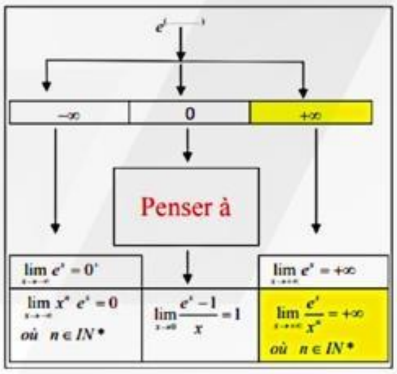
SUPER ASTUCES EXCEL
APPRENDRE FACILEMENT LES MATHS
STOP ~~COMPLICATIONS~~

ASTUCE : Expressions contenant les fonctions polynômes et les fonctions e^x

Exercice

Calculer $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x}}$ [On a une forme indéterminé $\dfrac{+\infty}{+\infty}$]





Indication:

- le terme dominant (le plus fort) du numérateur : e^{2x}
- $2x-2+e^{2x}-4e^x = e^{2x}\left(1-\dfrac{4}{e^x}+\dfrac{2x}{e^{2x}}-\dfrac{2}{e^{2x}}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{e^x} = 0$ en utilisant les propriétés : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{mx}}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{mx}} = 0$

$\forall m \in IN^*, \forall n \in IN^*$

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(\frac{2x}{e^{2x}}-\frac{2}{e^{2x}}+\frac{e^{2x}}{e^{2x}}-\frac{4e^x}{e^{2x}}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x}\left[1-\frac{4}{e^x}-\frac{2x}{e^{2x}}-\frac{2}{e^{2x}}\right]$$

$$= +\infty \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty \text{ et } = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\dfrac{4}{e^x}-\dfrac{2x}{e^{2x}}-\dfrac{2}{e^{2x}} = 1+0-0-0=1\right] \text{puisque}\right. \\ \left. \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^{2x}} = 0\right) \end{array} \right\}$$

En utilisant les propriétés : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{mx}}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^{mx}} = 0$ $\forall m \in IN^*, \forall n \in IN^*$

Résultat: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x} = +\infty}$

ASTUCE : Factorisation par «le monôme du plus haut degré» ou par «le terme dominant (le plus fort)»

* Pour calculer la limite à l' infini (∞) d'une expression contenant des polynômes et d'autres fonctions usuelles on factorise par « le monôme du plus haut degré » ou par « le terme dominant (plus fort) ».

Application 1 de l'astuce : Enlever l'indétermination $(+\infty)+(-\infty)$

Cas particulier 1 : Etude de la forme indéterminée $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right]$

avec $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$

Exercice 1 :

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-3x+2\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

***Indication:**

$$\sqrt{x^2+5}-3x+2=x\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-3+\frac{2}{x}\right)$$ à $+\infty$

Solution :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5}-3x+2=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+x\left(-3+\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+x\left(-3+\frac{2}{x}\right)$$ or $\sqrt{x^2}=|x|=x$ à $+\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\left(-3+\frac{2}{x}\right)\right]$$ (On a maintenant une forme déterminée $\left((+\infty)\times(-2)\right)$)

$$=-\infty$$ (Car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\left(-3+\frac{2}{x}\right)=\sqrt{1+0}-3+0=1-3=-2$)

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5}-3x+2=-\infty}$

***En Général : Pour enlever l'indétermination** $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **de la forme indéterminée** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on factorise par le monôme du plus haut degré (** x **).**

Cas particulier 2 : Etude de la forme indéterminée $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **:** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$

avec $a\neq\alpha^2$ $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$

Exercice 2 :

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication: $\sqrt{4x^2-5x+6}+3x+2=x\left(\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\left(3-\frac{2}{x}\right)=1$$

Solution :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2 &= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right) && \text{(On factorise par } \sqrt{4x^2} \text{ et } 3x\text{)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right) && (\sqrt{x^2}=|x|=-x) \text{ à } -\infty\\
&= \lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+\left(3-\frac{2}{x}\right)\right) && \text{[On a maintenant une forme déterminée } (-\infty)\times(1)\text{]}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(Puisque } \lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty \text{ et}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+\left(3-\frac{6}{x}\right)\right)=-\left(\sqrt{4-0-0}+(3-0)=-2+3=1\right).\end{array}\right\}$$

Résultat: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2=-\infty}$.

- **En Général : Pour enlever l'indétermination $[(+\infty)+(-\infty)]$ de la forme indéterminée**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on factorise par le monôme du plus haut degré (** x **).**

Application 2 de l'astuce: Enlever l'indétermination $\frac{+\infty}{-\infty}$

Cas particulier 3 : Expressions contenant des racines carrées :

Exercice 3 : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$ [On a la forme indéterminée $\frac{+\infty}{-\infty}$]

Indication: $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\frac{\sqrt{-1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}$ à $+\infty$

Solution :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$ ($\sqrt{x^2}=|x|=-x$ à $-\infty$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}}$$ (On simplifie par x et on obtient maintenant une forme déterminée)

$$=\frac{-\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}}$$ (Puisque $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$)

$$=-1$$

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}=-1}$

Cas particulier 5 : « $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$; P et Q deux polynômes »

- La limite vers l'infinie (∞) d'une fonction rationnelle : $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$; P et Q des polynômes est la limite du quotient du monôme du plus haut degré du numérateur sur le monôme du plus haut degré du dénominateur.

Exercice 6 : Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}$ [On a la forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$]

Indication:

- Le terme du plus grand degré du polynôme du numérateur (x^2-2x+1) est x^2
- Le terme du plus grand degré du polynôme du dénominateur (x^2-x^3+3) est $-x^3$
- On a $\frac{\ell}{\infty}=0$ (Mais attention l'écriture $\left(\frac{\ell}{\infty}=0\right)$ n'est pas autorisée et on la considère comme écriture fausse)

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^3}$$ (On prend le monôme du plus haut degré du numérateur x^2 et celui du dénominateur $-x^3$)

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}$$ (On simplifie par x^2 puisque $x\neq 0$) et on obtient maintenant la forme déterminée $\frac{-1}{+\infty}$

$$=0$$ (car $=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$)

Résultat: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}=0}$

Exercice 7 : Calculer $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}$ [On a la forme indéterminée $\frac{-\infty}{-\infty}$]

Indication:

- Le terme du plus haut degré du numérateur $-2+2x+3x^3$ est $3x^3$
- Le terme du plus haut degré du dénominateur $-6x^2+3x+1$ est $-6x^2$

Solution:

On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{-6x^2}$ (On prend le monôme du plus haut degré du numérateur $3x^3$ et celui du dénominateur $-6x^2$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2}$$ (On simplifie par $3x^2$ et on obtient la forme déterminée $\frac{-\infty}{-2}$)

$$=+\infty$$ (car $=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$)

Résultat: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}=+\infty}$