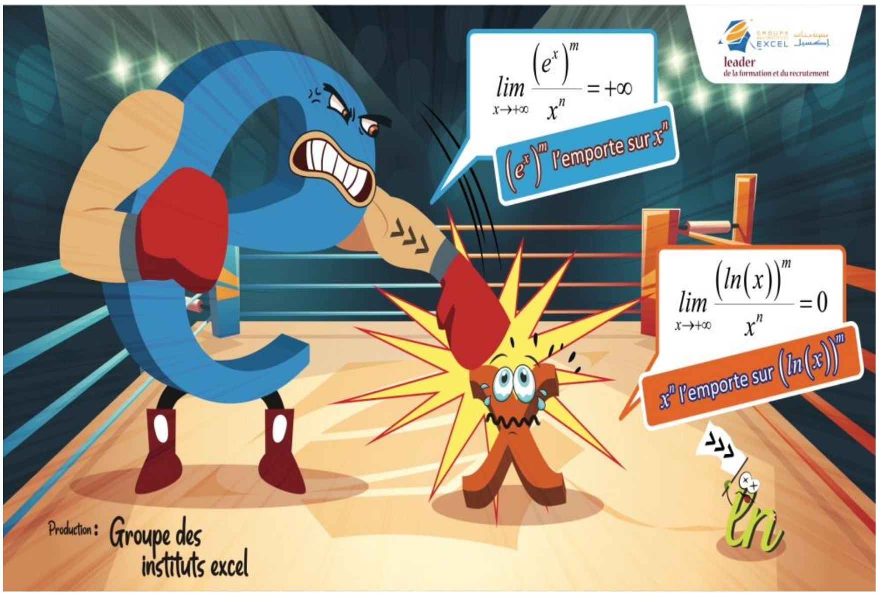
SUPER ASTUCES EXCEL
APPRENDRE FACILEMENT LES MATHS
STOP ~~COMPLICATIONS~~

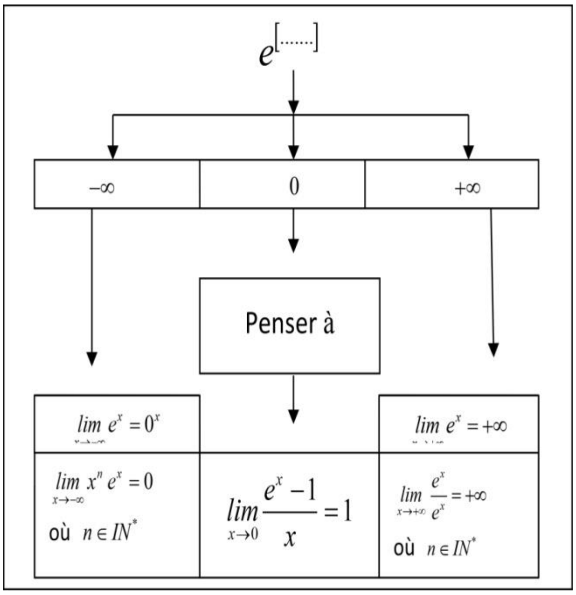
ASTUCE 1 : Factorisation par «le monôme du plus haut degré» ou par «le terme dominant (le plus fort)»

Application 1 de l'astuce : Limites d'expressions contenant $e^{[......]}$

Exercice 1

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-2+e^{2x}-4e^{x}}{x}$ [On a une forme indéterminée $\left(\dfrac{(+\infty)+(-\infty)}{+\infty}\right)$]





Indication:

- On factorise par le terme dominant (le plus fort) du numérateur : e^{2x}
- $2x-2+e^{2x}-4e^{x}=e^{2x}\left(1-\dfrac{4}{e^{x}}+\dfrac{2x}{e^{2x}}-\dfrac{2}{e^{2x}}\right)$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{4}{e^{x}}=0$

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^{2x}-4e^{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}\left(\dfrac{2x}{e^{2x}}-\dfrac{2}{e^{2x}}+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}-\dfrac{4e^{x}}{e^{2x}}\right)}{x}$$ (On factorise par le terme dominant e^{2x})

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}\left[1-\frac{4}{e^{x}}+\frac{2x}{e^{2x}}-\frac{2}{e^{2x}}\right]$$ (On a maintenant une forme déterminée $(+\infty)\times(1)$)

$$=+\infty \quad \left\{\begin{array}{l}\text{(Car } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x}=+\infty \text{ et } \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{e^{x}}+\dfrac{2x}{e^{2x}}-\dfrac{2}{e^{2x}}\right)=1-0+0-0=1\right] \\ \text{puisque } \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{2x}}=0\text{)}\end{array}\right\}$$

On utilisant les propriétés : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{mx}}{x^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{mx}}=0 \qquad \forall n,m\in N^*$

Résultat: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x}=+\infty}$

Exercice 2 :

Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right)$ [On a la forme indéterminée $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$]

Indication:

- Le terme dominant (le plus fort) est : $x^2\,e^{-x}$
- $\left(x^2-x\right)e^{-x}+x=x^2e^{-x}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^{-x}}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=0$

Solution:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^2-x\right)e^{-x}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x^2e^{-x}-xe^{-x}+x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}\left[1-\frac{xe^{-x}}{x^2e^{-x}}+\frac{x}{x^2e^{-x}}\right]$$ (On factorise par le terme dominant x^2e^{-x})

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-x}\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^{-x}}\right]$$ (On a maintenant une forme déterminée $(+\infty)\times(1)$)

$=+\infty$ (Car $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\;e^{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right]=1-0+0=1$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=0$)

Exercice 3 : Utilisation de la propriété : $\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-x}{1-\sqrt{x}}$ [On a la forme indéterminée $\left(\frac{(+\infty)+(-\infty)}{-\infty}\right)$]

Indication:

- $\frac{xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-x}{1-\sqrt{x}}=\sqrt{x}\,\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$
- On pose $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$ et on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}=\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}.\frac{1}{t-1}$
- Et on a $\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$

Solution :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-x}{1-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)}$$

(On factorise par les termes dominants x dans le numérateur et par $\sqrt{x}$ dans le dénominateur)

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}.\frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}$$

(On a $\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$ à $+\infty$)

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\times\frac{\left(e^{t}-1\right)}{t-1}$$

(On pose $t=\frac{1}{\sqrt{x}}$, donc quand $x\to+\infty\Rightarrow t\to0$ et on a $\sqrt{x}=\frac{1}{t}$)

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{t}-1}{t}\times\frac{1}{t-1}$$

(On a maintenant une forme déterminée $(1)\times(-1)$)

$$=-1$$

(Car $\lim_{t\to0}\frac{e^{t}-1}{t}=1$ et $\lim_{t\to0}\frac{1}{t-1}=\frac{1}{0-1}=-1$)

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}}-x}{1-\sqrt{x}}=-1}$

* Factorisation par «le monôme du plus haut degré»

* Utilisation de la « factorisation par le monôme du plus haut degré » pour calculer la limite à l' infini (∞) d'une expression contenant des polynômes et d'autres fonctions usuelles.

Application 2 de l'astuce : Enlever l'indétermination $(+\infty)+(-\infty)$

Cas particulier 1 : Etude de la forme indéterminée $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **:** $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$

Exercice 4 :

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-3x+2\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- $\sqrt{x^2+5}-3x+2=x\left(\sqrt{\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-3+\frac{2}{x}\right)$ à $+\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-3+\frac{2}{x}\right)=-2$

Solution :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-3x+2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+x\left(-3+\frac{2}{x}\right)\right)$$

(On factorise par les monômes de plus haut degré x^2 et x)

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+x\left(-3+\frac{2}{x}\right)\right)$$

(Car $\sqrt{x^2}=|x|=x$ à…$+\infty$)

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\left(-3+\frac{2}{x}\right)\right]$$ (On a maintenant une forme déterminée $\left((+\infty)\times(-2)\right)$)

$$= -\infty$$ (Car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\left(-3+\frac{2}{x}\right)=\sqrt{1+0}-3+0=1-3=-2$)

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+5}-3x+2=-\infty}$

***En Général** : **Pour enlever l'indétermination** $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **de la forme indéterminée** $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on factorise par le monôme du plus haut degré (** x **).**

Cas particulier 2 : Etude de la forme indéterminée $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **:** $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$

Exercice 5 :

Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- $\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2=x\left(-\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$ à $-\infty$
- $\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)=1$

Solution :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$$ (On factorise par les monômes de plus haut degré x^2 et x)

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2}\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$$ (On factorise par $\sqrt{x^2}$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+x\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$$ ($\sqrt{x^2}=|x|=-x$) à $-\infty$

$$=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+\left(3-\frac{2}{x}\right)\right)$$ [On a maintenant une forme déterminée $(-\infty)\times(1)$]

$$=-\infty$$ $\left\{\begin{array}{l}\text{(Puisque } \lim_{x\to-\infty}x=-\infty \text{ et}\\ \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\left(4-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}+\left(3-\frac{6}{x}\right)\right)=\left(-\sqrt{4-0+0}+(3-0)=-2+3=1\right)\end{array}\right\}$

Résultat: $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-5x+6}+3x-2\right)=-\infty}$

***En Général** : **Pour enlever l'indétermination** $\left[(+\infty)+(-\infty)\right]$ **de la forme indéterminée** $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a\neq\alpha^2$ **;** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on factorise par le monôme du plus haut degré (** x **).**

Application 3 de l'astuce: **Enlever l'indétermination** $\frac{\infty}{\infty}$

Cas particulier 3 : Expressions contenant des racines carrées :

Exercice 6 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2}$ [On a la forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{-\infty}$]

Indication:

- $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}$ à $+\infty$

Solution :

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$$

(On factorise par les monômes de plus haut degré x^2 au numérateur et x au dénominateur)

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$$

(On factorise par $\sqrt{x^2}$)

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$$

($\sqrt{x^2} = |x| = -x$ à $-\infty$)

$$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{2}{x}}$$

(On simplifie par x et on obtient maintenant une forme déterminée $\dfrac{(-1)}{(1)}$)

$$= \frac{-\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}}$$

(Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x} = 0$)

$$= -1$$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = -1}$

Cas particulier 4 : « $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; P et Q deux polynômes»

❖ La limite vers l'infini (∞) d'une fonction rationnelle : $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; P et Q des polynômes est la limite du quotient du monôme du plus haut degré du numérateur sur le monôme du plus haut degré du dénominateur.

Exercice 7 : Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}$ [On a la forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{-\infty}$]

Indication:

- Le terme du plus grand degré du polynôme du numérateur $\left(x^2-2x+1\right)$ est x^2
- Le terme du plus grand degré du polynôme du dénominateur $\left(x^2-x^3+3\right)$ est $-x^3$
- On a $\frac{\ell}{\infty}=0$ (Mais attention l'écriture $\left(\frac{\ell}{\infty}=0\right)$ n'est pas autorisée et on la considère comme écriture fausse)

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^3}$$ (On prend le monôme du plus haut degré du numérateur x^2 et celui du dénominateur $-x^3$)

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x}$$ (On simplifie par x^2 puisque $x\neq 0$ et on obtient maintenant la forme déterminée $\frac{-1}{+\infty}$)

$$=0$$ (Car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$)

Résultat: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-x^3+3}=0}$

Exercice 8 : Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}$ [On a la forme indéterminée $\frac{-\infty}{-\infty}$]

Indication:

- Le terme du plus haut degré du numérateur $-2+2x+3x^3$ est $3x^3$
- Le terme du plus haut degré du dénominateur $-6x^2+3x+1$ est $-6x^2$

Solution:

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{-6x^2}$ (On prend le monôme du plus haut degré du numérateur $3x^3$ et celui du dénominateur $-6x^2$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-2}$$ (On simplifie par $3x^2$ et on obtient la forme déterminée $\frac{-\infty}{-2}$)

$$=+\infty$$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$)

Résultat: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2+2x+3x^3}{-6x^2+3x+1}=+\infty}$

ASTUCE 2 : Multiplication par le Conjugué

- Multiplication par le conjugué et on applique l'identité remarquable: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
- Pour calculer la limite d'une expression qui contient des racines carrées

Application 1 de l'astuce : [Enlever l'indétermination $\frac{0}{0}$]

Exercice 9: Calculer $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ [On a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$]

Indication :

- Le conjugué de $\left(\sqrt{x+2}-2\right)$ est $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$;
- Et on a : $\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=\left(\sqrt{x+2}\right)^2-(2)^2=x+2-4=x-2$

Solution :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$ (On multiplie par le conjugué du numérateur $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$ (On applique $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$ (Puisque $(x+2)>0$ au voisinage de 2 alors $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x+2$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$ (On simplifie par $x-2$, puisque $x\neq 2$)

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$$ (Puisque on a maintenant une forme déterminée $\left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}\right)$ donc il suffit de remplacer x par 2)

$$=\frac{1}{\sqrt{2+2}+2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{4}}$

Exercice 10 :

Calculer $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}\right)$ [On a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$]

Indication:

- Le conjugué de $\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)$ est $\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)$
- Et on a $\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2=1+x^2-1-x=x^2-x=x(x-1)$

Solution:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$ (On multiplie par le conjugué du dénominateur)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}$$ (On applique $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{(1+x^2)-(1+x)}$$ (Puisque $1+x^2>0$ et $1+x>0$ au voisinage de 0 donc $\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2=1+x^2$ et $\left(\sqrt{1+x}\right)^2=1+x$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x(x-1)}$$ (On simplifie par x)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}$$ (Puisqu'on a obtenu maintenant une forme déterminée $\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}{x-1}\right)$ donc il suffit de remplacer x par 0)

$$= \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}{0-1}$$

$$= -2$$

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = -2}$

Application 2 de l'astuce : [Enlever l'indétermination $(+\infty)+(-\infty)$]

Cas particulier 1: $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right]$ / $a=\alpha^2$, $a \in R_+^*$ et $\alpha \in R_+^*$

Exercice 11 : Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- Le conjugué de $\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$ est $\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$
- Et on a : $\left(\sqrt{x^2+3}-x\right).\left(\sqrt{x^2+3}+x\right) = \left(x^2+3\right)-x^2 = 3$

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x}$$ (On multiplie par le conjugué)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$$ (On applique $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$$ ($\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 = x^2+3$ puisque $x^2+3>0$ à $+\infty$)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$ (On obtient maintenant une forme déterminée $\frac{3}{+\infty}$)

$$= 0$$ (Car $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}+x=+\infty$ puisque $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$)

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=0}$

Plus clairement: Entre nous on a utilisé $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ et $\frac{3}{+\infty}=0$ (Mais attention les écritures $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ et $\left(\frac{3}{+\infty}=0\right)$ ne sont pas autorisées et on les considère comme des écritures fausses).

En Général : Pour calculer la limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{a x^2+bx+c}-\alpha x+\beta\right] / \ a=\alpha^2$ **,** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on multiplie par le conjugué** $\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+(\alpha x-\beta)\right]$

Exercice 12 : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-3x+7\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- Le conjugué de $\sqrt{9x^2-5x-4}-(3x-7)$ est $\sqrt{9x^2-5x-4}+(3x-7)$
- Et on a $\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-(3x-7)\right)\left(\sqrt{9x^2-5x-4}+(3x-7)\right)=37x-53$

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-3x+7\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-(3x-7)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-(3x-7)\right)\left(\sqrt{9x^2-5x-4}+(3x-7)\right)}{\sqrt{9x^2-5x-4}+(3x-7)}$$ (On multiplie par le Conjugué)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2-5x-4}\right)^2-(3x-7)^2}{\sqrt{x^2(9-5x-4)}+x\left(3-\frac{7}{x}\right)}$$ (On applique $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(9x^2-5x-4\right)-9x^2+42x-49}{\sqrt{x^2}\sqrt{9x^2-\frac{5x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}+x\left(3-\frac{7}{x}\right)}$$ (On applique $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et puisque $\left(9x^2-5x-4\rangle 0\right)$ à $+\infty$ donc $\left(\sqrt{9x^2-5x-4}\right)^2=9x^2-5x-4$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(37-\frac{53}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)+x\left(3-\frac{7}{x}\right)}$$ (On a $\sqrt{x^2}=|x|=x$ à $+\infty$)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(37-\frac{53}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}+\left(3-\frac{7}{x}\right)\right)}$$ (On factorise par x)

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{37-\frac{53}{x}}{\sqrt{\left(9-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}+\left(3-\frac{7}{x}\right)}$$ (On simplifie par $x\neq 0$ et on obtient maintenant une forme déterminée)

$$=\frac{37-0}{\left(\sqrt{9-0-0}\right)+(3-0)}$$ (Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{53}{x}=0$)

$$=\frac{37}{6}$$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2-5x-4}-3x+7\right)=\frac{37}{6}}$

Cas particulier 2: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$ avec $a=\alpha^2$ et $a\in R_+^*$ et $\alpha\in R_+^*$

Exercice 13 : Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- Le conjugué de $\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$ est $\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$
- Et on a $\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(x)^2=x^2+3-x^2=3$

Solution:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)}$$ (On multiplie par le conjugué)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+3}-x}$$ (On applique l'identité remarquable $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}$$ (On a obtenu maintenant la forme déterminée $\frac{3}{+\infty}$)

$$=0$$ (car $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}+(-x)=+\infty$ puisque $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$)

Résultat : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+3}+x=0}$

Plus clairement: Entre nous on a utilisé $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$ et $\frac{3}{+\infty}=0$ (Mais attention les écritures $\left(\frac{3}{+\infty}=0\right)$ et $\left[(+\infty)+(+\infty)=(+\infty)\right]$ ne sont pas autorisées et on les considère comme des écritures fausses)

En Général : Pour calculer $\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{ax^2+bx+c}+\alpha x+\beta\right]$ **avec** $a=\alpha^2$ **et** $a\in R_+^*$ **et** $\alpha\in R_+^*$ **on multiplie par le conjugué** $\left[\sqrt{ax^2+bx+c}-(\alpha x+\beta)\right]$**.**

Exercice 14 : Calculer $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2-7x+2}+\sqrt{3}x-5\right)$ [On a la forme indéterminée $(+\infty)+(-\infty)$]

Indication:

- Le conjugué de $\left(\sqrt{3x^2-7x+2}+\left(\sqrt{3}x-5\right)\right)$ est
- $\left(\sqrt{3x^2-7x+2}+\left(\sqrt{3}x-5\right)\right)\left(\sqrt{3x^2-7x+2}-\left(\sqrt{3}x-5\right)\right)=\left(10\sqrt{3}-7\right)x-23$

Solution :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2-7x+2}+\left(\sqrt{3}x-5\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-7x+2}+\left(\sqrt{3}x-5\right)\right)\left(\sqrt{3x^2-7x+2}-\left(\sqrt{3}x-5\right)\right)}{\sqrt{3x^2-7x+2}-\left(\sqrt{3}x-5\right)}$$ (On multiplie par le conjugué)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2-7x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3}x-5\right)^2}{\sqrt{3x^2-7x+2}-\left(\sqrt{3}x-5\right)}$$ (On applique $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{3x^2} - 7x + 2 - \cancel{3x^2} + 10\sqrt{3}x - 25}{\sqrt{x^2\left(3 - \frac{7x}{x^2} + \frac{2}{x}\right)} - x\left(\sqrt{3}\frac{5}{x}\right)}$$

$\left((a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\right.$ et on a aussi $\left(\sqrt{3x^2 - 7x + 2}\right)^2 = 3x^2 - 7x + 2$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(10\sqrt{3} - 7\right)x - 23}{\sqrt{x^2}\sqrt{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} - x\left(\sqrt{3} - \frac{5}{x}\right)}$$

(On factorise par les monômes de plus haut degré x^2 et x)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\left(10\sqrt{3} - 7\right) - \frac{23}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}\right) + x\left(\sqrt{3} - \frac{5}{x}\right)}$$

($\sqrt{x^2} = |x| = -x$ à $-\infty$)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\left(10\sqrt{3} - 7\right) - \frac{23}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} + \left(\sqrt{3} - \frac{5}{x}\right)\right)}$$

(On factorise par x)

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(10\sqrt{3} - 7\right) - \frac{23}{x}}{-\left(\sqrt{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}\right) + \left(\sqrt{3} - \frac{5}{x}\right)}$$

(On simplifie par $x \neq 0$ et on obtient maintenant une forme déterminée)

$$= \frac{\left(10\sqrt{3} - 7\right) - 0}{-\left(\left(\sqrt{3 - 0 + 0}\right) + \left(\sqrt{3} - 0\right)\right)}$$

(Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{23}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{7}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = 0$)

$$= \frac{7 - 10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 7x + 2} + \sqrt{3}x - 5\right) = \frac{7 - 10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}}$

ASTUCE 3 : Simplification par $x - a$ dans la limite : $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$

ASTUCE : Si dans la limites «$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$; P et Q deux polynômes» on obtient la forme indéterminé $\frac{0}{0}$ il suffit de factoriser les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ par $x - a$ et de simplifier ensuite par $(x - a)$ en appliquant la propriété «si $P(a) = 0$ alors le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$ »

Exercice 15 :

Calculer $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 2x^2 + x + 4}$ [On a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$]

Indication:

- $P(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ «on calcule les racines du polynôme $P(x) = x^2 + 3x + 2$ »
  Ou «On effectue la division euclidienne de $P(x) = x^2 + 3x + 2$ par $x + 1$»
- Propriété : si un polynôme de second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines α et β alors
  $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$
- $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x+1)(x^2 - 3x + 4)$ On effectue la division euclidienne de $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ par $x + 1$

Solution :

- Factorisation du polynôme $P(x)=x^2+3x+2$

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times1\times2=9-8=1\rangle 0$

Donc $P(x)=x^2+3x+2$ admet deux racines α et β :

$$\alpha=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{1}}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \text{ et } \beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3+1}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Donc $P(x)=x^2+3x+2=(x-\alpha)(x-\beta)=(x-(-2))(x-(-1))=(x+2)(x+1)$

- Factorisation du polynôme $Q(x)=x^3-2x^2+x+4$

  Montrons que $Q(x)$ est divisible par $(x+1)$:

  On a $Q(-1)=(-1)^3-2\times(-1)^2+(-1)+4=-1-2-1+4=0$

  Donc $Q(-1)=0$, alors -1 est une racine de $Q(x)$ d'où $Q(x)$ est divisible par $(x-(-1))=(x+1)$

❖ La division euclidienne de x^3-2x^2+x+4 par $x+1$:

$$\begin{array}{r|l}
\begin{array}{r} x^3-2x^2+x+4 \\ -\quad x^3+x^2 \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x^2-3x+4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{r} -3x^2+x+4 \\ -\quad -3x^2-3x \end{array} & \\
\hline
\begin{array}{r} 4x+4 \\ -\quad 4x+4 \end{array} & \\
\hline
0+0 &
\end{array}$$

Donc $Q(x)=x^3-2x^2+x+4=(x+1)(x^2-3x+4)$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x+4}=\lim_{x\to-1}\frac{(\cancel{x+1})(x+2)}{(\cancel{x+1})(x^2-3x+4)}$$ (On simplifie par $x+1$)

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x+2}{x^2-3x+4}$$ (On a maintenant une forme déterminé donc il suffit de remplacer x par -1)

$$=\frac{-1+2}{(-1)^2-3\times(-1)+4}$$

$$=\frac{1}{1+3+4}$$

$$=\frac{1}{8}$$

Résultat : $$\boxed{\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3-2x^2+x+4}=\frac{1}{8}}$$

ASTUCE 4 : Utilisation du nombre dérivé

- Utilisation de la définition du nombre dérivé en un point $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, Pour enlever l'indétermination « $\frac{0}{0}$ » qui s'écrit sous la forme $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Exercice 16

Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2021}-1}{x-1}$ [On a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$]

Première méthode

Indication :

- On pose $f(x)=x^{2021}$ on a : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^{2021}-1}{x-1}$

Solution :

On veut calculer $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2021}-1}{x-1}$

Posons $f(x)=x^{2021}$ qui est dérivable en 1

On a $f(1)=1$,donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2021}-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

Or $f'(x)=2021x^{2020}$ pour tout $x \in R$, donc $f'(1)=2021$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2021}-1}{x-1} = 2021}$

Deuxième méthode : factorisation de : $a^n - b^n$

Indication :

- $x^{2021}-1=(x-1)\left(x^{2020}+x^{2019}+\ldots+x^2+x^1+x^0\right)$

Solution :

On a d'après l'identité remarquable :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

$$x^{2021}-1=x^{2021}-1^{2021}=(x-1)\left(x^{2020}+x^{2019}+\ldots+x^2+x+1\right)$$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{2021}-1}{(x-1)} = \frac{(x-1)\left(x^{2020}+x^{2019}+\ldots+x^2+x+1\right)}{(x-1)}$

En simplifie par $x-1$ puisque $x \neq 1$ on a :

$$\frac{x^{2021}-1}{x-1} = \underbrace{x^{2020}+x^{2019}+\ldots+x^2+x+1}_{2021\,termes}$$

Donc $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2021}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}x^{2020}+x^{2019}+\ldots+x^2+x+1$

$$=\underbrace{1^{2020}+1^{2019}+\ldots+1^2+1^1+1^0}_{2021\,termes}$$

$$=2021$$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{2021}-1}{x-1}=2021}$

Exercice 17

Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ [On a une forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$]

Indication :

On a $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ avec $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

Solution :

Posons $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ qui est dérivable en $x_0=0$

On a $f(0)=1$, donc $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

Or $f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pour tout $x\in R$

Donc $f'(0)=0$

Résultat : $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=0}$

بمساهمة الأساتذة الأفاضل:

- الأستاذ: محمد أبو البقاء
- الأستاذ: بدر الدين بنسماعيل
- الأستاذ: الوظيفي العربي (الجديدة)
- الأستاذ: يوسف بورودي
- الأستاذ: محسن الكراوي