Mathématiques I

Épreuve 2012

Question 1 : Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.

Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il réussit tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$.Le jeu s'arrête dés que le joueur échoue à un niveau. On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveau réussis par le joueur. Pour tout entier naturel k de {1,2, ... n}, exprimer la probabilité P(X≥K) en fonction de K.

A) $(\frac{2}{3})^k$ (k-1) B) $(\frac{2}{3})^k$ C) $(\frac{1}{3})^{k+1}$ D) $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^k$ E) Autre réponse

Question 2 : On considère le modèle très simple ci-après , qui décrit l'évolution du cours d'une action à la bourse . On suppose que chaque jour de cotation, trois cas seulement sont possibles :

i) *le prix de l'action augmente de 1 dirham*
ii) *le prix reste stable*
iii) *le prix diminue d'un dirham*

De plus la variation journalière du prix est considérée comme une variable aléatoire X .D'après ce qui précède, la v .a. X prend les valeurs -1,0, 1 ; les probabilités correspondantes seront notées *q*, *1-q-r* et *r*, respectivement.
La variance V(X) de la v .a X est alors égale à :

A) $(r-q)^2$ B) $(r+q)^2$ C) (r-q) (r+q) D) r^2+q^2+1 E) Autre réponse

Question 3 : le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

X	0	1	2
P(X=xi)=pi	0 ,15	0 ,45	0 ,4

Dans cette station-service la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0, 3 .Son choix est indépendant des autres clients .On considère l'événement suivant

E : " En cinq minute un client achète de l'essence "

La probabilité P(E) est alors égale :

A) 0, 483 B) 0, 315 C) 0, 25 D) 0, 42 E) Autre réponse

__Question 4__ : On joue à un jeu ou la probabilité de gagner à une partie est de 5 % .Si le joueur gagne à une partie, il obtient un gain net de 9oo, sinon il perd 100 (le gain du joueur à une partie est donc soit + 900, soit – 100) .Si le joueur joue à 25 parties de ce jeu, alors la variance de son gain moyen est :

A) 1800 B) 1900 C) 2000 D) 2100 E) Autre réponse

__Question 5__ : On considère un type de composants électroniques dont la durée de vie X, exprimée en heure, est une variable aléatoire de densité de probabilité f, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{10}{t^2}, & t \geq 10 \\ 0, & Sinon \end{cases}$$

Déterminer le réel m pour lequel : P(X≤m)=P(X>m)

A) m = 15 B) m=20 C) m=$\frac{1}{10}$ D) m = $\frac{2}{5}$ E) Autre réponse

__Question 6 :__ Deux tireurs ouvrent le feu simultanément .La probabilité d'un coup au but du premier tireur est égale à p_1 ; celle du second tireur est égale à p_2 .La probabilité pour qu'un tireur atteigne le but et que l'autre le rate est égale à

A) (p1+ p2)² B) (p1 –p2)² C) $|p1 - P2|$ D) $|p1 + p2|$ E) autre réponse

__Question 7 :__ On considère, pour tout n entier naturel, l'intégrale.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n e^{1-x}}{n!}\, dx$$

Après une intégration par partie donnant une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} , montrer que pour tout n naturel on a :

A) $I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ B) $I_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ C) $I_n = 1 - \sum_{p=0}^{n} \frac{2}{p!}$ D) $I_n = e - \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$

E) Autre réponse

__Question 8:__ Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{\sqrt{2t+1}}\, dt$

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

$\lim_{x \to +\infty} F(x) \quad =$

A) $-\infty$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\infty$ E) Autre réponse

__Question 9 :__ La COVECOR est une coopérative de vente par correspondance . Chaque sociétaire est muni d'un indicatif. De plus, pour commander par le réseau internet, il doit posséder un code secret personnel. L'indicatif du sociétaire est formé d'un numéro de 4 chiffres suivi deux lettres, répondant aux conditions suivantes :

-Il peut y avoir répétition des chiffres.
-Il ne peut y avoir répétition de lettres ;
-Le premier chiffre à gauche ne peut être zéro ;
-la lettre ne peut être B.
Alors le nombre d'indicatifs est :

A) $(10^4 - 9^4) \times 25^2$ B) $(10^5 - 9^4) \times 50$ C) $(10^5 - 9^4) \times 25$ $D)$ 2158 E) Autre réponse

__Question 10__ : On considère la fonction définie par : $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$ au voisinage de $+\infty$, $[f(x) - x]$ est équivalent à :

A) e^{-x} B) $-e^{-x}$ C) e^{-2x} D) $-e^{-2x}$ E) Autre réponse

__Question 11__ : Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\, dx$$

A) $\frac{-\ln 2}{3} + 2\ln 2 - \ln 3$ B) $\frac{-\ln 2}{3} + \ln 2 - \ln 3$ C) $\frac{-ln2}{3}$ ln 3 D) $\frac{-ln2}{3}$ + ln
E) autre réponse

__Question 12__ :L'intégrale $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\ dx$ est égale à :

A) $\frac{115}{15}$ B) $\frac{116}{15}$ C) $\frac{117}{15}$ D) $\frac{15}{2}$ E) Autre réponse

__Question 13__ : On considère le tableau de contingence suivant :

X_i \ Y_j	**2**	**4**	**6**	n_i
2	**0**	**1**	**1**	**2**
4	**2**	**3**	**0**	**5**
6	**1**	**1**	**1**	**3**
n_j	**3**	**5**	**2**	**10**

La moyenne conditionnelle de X si $Y = y_2$ est :
A) 3 ,2 B) 4 C) 7 D) 2 E) Autre réponse

Question 14 : Soient A, B et I les trois matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Après avoir calculer B^2 et B^3 et exprimé A en fonction de B et I, pour tout entier naturel n, A^n est égale à :

A) $\begin{pmatrix}1&2n&2n+1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix}1&2n&2n+1\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix}1&2n&n(2n+1)\\0&1&2n\\0&0&1\end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix}1&2n&2n+1\\0&n&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 15 : Soit f la fonction réelle de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$; on désigne par f' la fonction dérivée de f, alors $f'(x)$ est égale à

A) $\frac{2-x}{x(x^2-x+1)}$ B) $\frac{2+x}{2x\,(x^2-x+1)}$ C) $\frac{2-x}{2x\,(x^2-x+1)}$ D) $\frac{2}{x(x^2-x+1)}$ E) Autre réponse

Question 16 : Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules noires. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à ce qu'il ne reste dans l'urne que des urnes de la même couleur.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre total de tirages nécessaires .Calculer la probabilité P(X=4) .

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{8}{81}$ D) $\frac{3}{15}$ E) Autre réponse

Question 17 : une personne possède 4 clefs parmi lesquelles une seule ouvre la porte .Elle les essaie au hasard en éliminant celles qui ne marchent pas. On pose X « le nombre d'essais pour ouvrir la porte ».

Alors la variance de X est égale à :

A) $\frac{5}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{4}$ D) 1 E) Autre réponse

Question 18 : Soit A la matrice définie par $\begin{bmatrix}3&1&1\\2&-1&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}$, la matrice inverse de A est :

A) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-1&3&2\\3&5&-1\\1&-4&-5\end{bmatrix}$ B) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1&3&2\\3&-5&-1\\1&-4&-5\end{bmatrix}$ C) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1&3&2\\3&-5&-1\\1&4&5\end{bmatrix}$

D) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1&-3&-2\\3&-5&-1\\1&-4&-5\end{bmatrix}$ E) Autre réponse

Question 19 : Soient les matrices carrées :

P= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A telle que $P^{-1}AP = D$

$\forall\, n \in$ IN*; $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est égal à :

A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$

E) Autre réponse

Question 20: soit $(u_n)_{n\in \mathrm{IN}}$ une suite réelle vérifiant $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 0 \le u_n \le 1\ \ et\ \ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$,

alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) =$

A) 1 ; B) $\frac{1}{2}$; C) 0 D) $+\infty$ E) Autre Réponse

Mathématiques II

Épreuve 2012

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

Question 1 : soient p et q deux entiers naturels, et soit a et b deux nombres réels tels que a<b.

On pose $I_{p,q} = \int_b^a (t-a)^p (b-t)^q \, dt$

Après avoir établi une récurrence entre et, réduire l'expression de $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$, déduire l'expression de $I_{p,q}$.

A) $\frac{p!q!}{(p+q-1)!}(a-b)^{p+q}$ B) $\frac{p!q!}{(p+q)!}(a-b)^{p+q+1}$ C) $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}(b-a)^{p+q+1}$

D) $\frac{(p+q)!}{(pq)!}(b-a)^{p+q-1}$ E) Autre réponse

Question 2 : Soient X et Y deux variables aléatoires vérifiant :

$\forall (i,j) \in IN^2 \text{ , } P\left[(X=i) \cap (Y=j)\right] = \frac{1}{j!}\frac{a}{2^{i+j}}$

Pour que la formule précédente définisse une loi de probabilité conjointe du couple (X, Y), la constante a est :

A) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ B) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ C) $\frac{1}{2e}$ D) $\frac{1}{2}$ E) Autre réponse

Question 3 : Soit E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On rappelle que si U_1, U_2, U_3, U_4 sont les matrices définies par :

$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la famille (U_1, U_2, U_3, U_4) est une base de E, qui est donc de dimension 4.

Soient A et B deux matrices de E et $\varphi_{A,B}$ l'application qui, à toute matrice M de E, associe la matrice AM- MB .

$\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E .

Dans le cas particulier ou A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4) est alors égale à :

A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ C) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

<u>Question 4 :</u> Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors un équivalent de S_n quand n tend vers l'infini est :

A) n ! B) $\log(n!)$ C) $n \log 2$ D) $\log n$ E) Autre réponse

Note : $\log x$ désigne le logarithme népérien de x ($x \in IR^*{}_+$) .

<u>Question 5 :</u> Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre n invités que l'on note : $I_1, I_2, \ldots, I_N$.

Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on modélise l'instant d'arrivée de l'invité I_k par une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1]. On suppose de plus que, pour tout réel t, les n événements $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \ldots, (T_n \leq t)$, sont indépendants.

Soit un réel t appartenant à [0 ; 1]. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note B_k la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement $(T_k \leq t))$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

Soit S_t la variable définie par : $S_t = B_1 + B_2 + \cdots + B_n, et$ A la variable aléatoire égale a l'instant d'arrivée du premier invité.

Après avoir comparé les évènements : (A>t) et (St=0), déterminer la densité f de la variable aléatoire A.

A) $f\ (t) \begin{cases} t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ B) $f(t) = \begin{cases} n(1-t)^{n-1} & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

C) $f(t) = \begin{cases} 1 - t^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$ D) $f(t) = \begin{cases} nt^n & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$

E) Autre réponse

Question 6 : Soir f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

f(x, y, z) = (x + 2y + 5z , 2x-y , -x +2y –z)

Soit u= (0, 1 , 1 , α) un vecteur de $\mathbb{R}^4$, où α est un nombre réel. Pour quelle valeur de α le vecteur u appartient au sous espace vectoriel Im(f).

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $-\frac{2}{5}$ D) $-\frac{4}{5}$ E) Autre réponse

Question 7 : Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les cotés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

■ Le pion est sur le sommet 1 au départ.

■ Lorsque le pion est à l'instant donné sur un sommet du carré, il se déplace l'instant

suivant vers un sommet voisin (relié par un coté) avec la probabilité $\frac{1}{4}$ ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité de $\frac{1}{2}$.

On noté Xn la variable aléatoire égale au numéro de sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n . On a donc X0 = 1 .

Soit A la matrice carrée d'ordre 4 dont le terme situé a l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle p (Xn+1 = i / Xn = j) .

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K sous la forme :

A) $A = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}K$ B) A=$\frac{1}{2}J + \frac{1}{4}K$ C) $A = \frac{2}{3}J + \frac{1}{3}K$ D) A=$\frac{1}{4}J + \frac{1}{2}K$

E) Autre réponse

Question 8 : Pour n entier naturel non nul, on pose Sn=$\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$, alors un équivalent de Sn quand n tend vers l'infini est :

A) $\sqrt{n}$ B) $\sqrt{2n}$ C) $2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ D) $2(\sqrt{2}+1)\sqrt{n}$ E) Autre réponse

Question 9 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;\ 1]$

L'espérance de la variable aléatoire Y définie par Y=$\frac{X}{2-X}$ est :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\ln 2}{2}$ C) $2\ln 2-1$ D) $4\ln 2+1$ E) Autre réponse

Question 10 : Une urne contient 10 boules rouges et 2 boules jaunes. On extrait les boules de l'urne au hasard, une à une et sans remise, jusqu'à l'apparition d'une boule rouge.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires.

La variance de la variable X est alors égale à :

Question 11 : Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :

$f_n\ :\ R_+^*\ \to R$

$$x\to\ f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n\ln x}{x^2-1} & si\ x\neq 1\\ \dfrac{1}{2} & si\ x=1\end{cases}$$

N.B : ln désigne le logarithme népérien.

Pour $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable en 1 ; de plus, la dérivée de f_n en 1 égale à :

A) $-\frac{1}{2}+7n$ B) $-\frac{1}{2}+3n$ C) $\frac{n+1}{2}$ D) $\frac{n-1}{2}$ E) Autre réponse

Question 12 : Soit f la fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est positive et qu'elle vérifie la propriété $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; On désigne par F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2, et soit $X_1, X_2, \dots, X_N$ N variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la même fonction de répartition F. On définit la variable aléatoire réelle Y_N par Y_N = Max($X_1, X_2, \dots, X_N$) alors YN admet une densité de probabilité g définie par :

A) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{2N-2}$
B) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = Nf(x)[F(x)]^{N-1}$
C) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = NF(x)[f(x)]^{N-1}$
D) $(\forall x \in \mathbb{R}) g(x) = [f(x)]^{N}$
E) Autre réponse

Question 13 : Soit U une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$.

En utilisant la définition de la variance de U, calculer $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

A) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ D) $\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$ E) Autre réponse

Question 14 : On considère la suite (Sn) définie par :

$\forall n \in IN^*$: $\quad Sn = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$

La suite (S_n) converge vers :

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{2}\ln 2$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{3}{2}\ln 2$ E) Autre réponse

Question 15: α désigne un paramètre réel.

On considère la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & +1 \end{pmatrix}$

Et on note φ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Quel que soit α, l'endomorphisme φ_α admet les valeurs propres :

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

A) $(\alpha - 1)$ et $(\alpha + 1)$ B) 1 et $(\alpha - 1)$ C) -1 et $(\alpha - 1)$ D) 1 et $(\alpha + 1)$

E) Autre réponse

Question 16 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1})^x;$$

Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

A) $+\infty$ B) $\frac{1}{3}$ C) e D) $\frac{1}{e}$ E) Autre réponse

Note : e désigne la base du logarithme népérien.

Question 17 : On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir déterminé une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne (-1, 1, 1) telle que $A = PDP^{-1}$, calculer la matrice $c = P^{-1}BP$

A) $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ C) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

D) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ E) Autre réponse

Question 18 : On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + \lambda y = \alpha \\ \lambda x + y = \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t = y \\ x - \lambda + \lambda z + t = \delta \end{cases}$$

où $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^5$

La condition nécessaire pour que le système admette une infinité de solution est :

A) $\lambda \in \{0, 2\}$ B) $\lambda \in \left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ C) $\lambda \in \{-1, 1\}$ D) $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

E) Autre réponse

Question 19 : Au cours d'un scrutin, des enquêteurs organisent un sondage à la sortie des bureaux de vote. On considère que le scrutin débute à l'instant 0 et s'achève à l'instant 1. La liste électorale comprend n noms, numérotés de 1 à n. Il ne peut pas y avoir d'abstentions. On modélise l'instant d'arrivée de l'électeur i , $1 \leq i \leq n$, par une variable aléatoire X_i de loi uniforme sur le segment $[0,1]$.

Les variables X_i sont supposées mutuellement indépendantes. On note :

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ les n variables aléatoires ayant pour valeurs les valeurs variables

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ordonnées dans l'ordre croissant . Par exemple, pour n=4, si on obtient

$X_1 = 0{,}3$; $X_2 = 0{,}1$; $X_3 = 0{,}7$; $X_4 = 0{,}2$, on aura :

$Y_1 = 0{,}1$; $Y_2 = 0{,}2$; $Y_3 = 0{,}3$; $Y_4 = 0{,}7$.

Soit $Y_n = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ l'instant d'arrivée du dernier volant. La variance de Y_n est alors égale à :

A) $\frac{n}{(2n+1)(n+3)}$ B) $\frac{2n}{(n+1)(n+4)}$ C) $\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$ D) $\frac{2n}{(n+3)^2(n+1)}$

E) Autre réponse

Question 20 : Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x - 1)}$;

Alors $\lim_{x \to 0+} f(x)$

A) $-\infty$ B) -1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $+\frac{1}{2}$ E) Autre réponse