

# Groupe des Instituts Excel

## CALCUL LITTÉRAL (PARTIE 2)

### I – Équations « produit »

#### « Règle du produit nul »

|  $a$  et  $b$  sont des nombres ou des expressions. Si  $ab = 0$ , alors  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

#### Définition

| Une équation produit nul est une équation de la forme  $(ax + b)(cx + d) = 0$  dans laquelle  $a, b, c$  et  $d$  des nombres.

#### Méthode (RÉSOLVRE UNE ÉQUATION PRODUIT NUL)

On veut résoudre l'équation  $(4x + 8)(3x - 21) = 0$ .

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre : ← On cite la règle du produit nul

$$\begin{aligned}4x + 8 &= 0 \\4x + 8 &= 0 \\4x + 8 - 8 &= 0 - 8 \\4x &= -8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{-8}{4} \\x &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ou} \quad 3x - 21 &= 0 \\3x - 21 &= 0 \\3x - 21 + 21 &= 0 + 21 \\3x &= 21 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{21}{3} \\x &= 7\end{aligned}$$

← On écrit les deux équations à résoudre

On résout séparément les deux équations

Donc  $\mathcal{S} = \{-2; 7\}$  ← On n'oublie pas l'ensemble des solutions (généralement il y en a deux)

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation  $(10x + 4)(6x - 18) = 0$

Réponse : D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :  $10x + 4 = 0$  ou  $6x - 18 = 0$

$$\begin{aligned}10x + 4 &= 0 \\10x + 4 - 4 &= 0 - 4 \\10x &= -4 \\ \frac{10x}{10} &= \frac{-4}{10} = -0,4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6x - 18 &= 0 \\6x - 18 + 18 &= 0 + 18 \\6x &= 18 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{18}{6} = 3\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S} = \{-0,4; 3\}$ .

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation  $13x(2x + 1) = 0$

Réponse : D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :  $13x = 0$  ou  $2x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}13x &= 0 \\ \frac{13x}{13} &= \frac{0}{13} \\x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x + 1 &= 0 \\2x + 1 - 1 &= 0 - 1 \\2x &= -1 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-1}{2} = -0,5\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S} = \{-0,5; 0\}$ .



#### ATTENTION !!!

ξ Dans l'ensemble solution, on écrit toujours les nombres dans l'ordre croissant!

## II – Équations carrées

### Propriété

| L'équation  $x^2 = a$ , où  $a$  un nombre *positif* admet exactement deux solutions :  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ .

Exemple (1) : On souhaite résoudre l'équation  $x^2 = 49$

Réponse :

$x^2 = 49$  est une équation carrée : ses solutions sont  $x = \sqrt{49} = 7$  ou  $x = -\sqrt{49} = -7$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{-7; 7\}$ .

Exemple (2) : On souhaite résoudre l'équation  $x^2 = 2$

Réponse :

$x^2 = 2$  est une équation carrée : ses solutions sont  $x = \sqrt{2}$  ou  $x = -\sqrt{2}$ .

Donc  $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ .

Exemple (3) : On souhaite résoudre l'équation  $x^2 = \frac{3}{4}$

Réponse :

$x^2 = \frac{3}{4}$  est une équation carrée : ses solutions sont  $x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ou  $x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Donc  $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ .

### Propriété

Une équation carré de la forme  $x^2 = a$ , où  $a$  est un nombre admet :

- exactement deux solutions lorsque  $a > 0$ ,
- exactement une solution lorsque  $a = 0$ ,
- aucune solution lorsque  $a < 0$ .

## III – Équations plus compliquées

### 1. Équations du premier degré

#### Méthode (RÉSOUTRE UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ)

1. S'il y a des parenthèses, on les élimine (par exemple en développant).
2. S'il y a des membres de la famille des  $x$  à droite, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou -) pour l'annuler (et le faire apparaître à gauche).
3. S'il y a des membres de la famille des nombres à gauche, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou -) pour l'annuler (et le faire apparaître à droite).
4. Il ne reste plus qu'une seule opération ( $\times$  ou  $\div$ ) que l'on simplifie en appliquant le « principe de la balance » (avec  $\times$  ou  $\div$ ).
5. On n'oublie pas d'écrire l'ensemble solution.

Exemple : On souhaite résoudre l'équation  $8(x + 2) = 6x - 8$ .

$$\begin{array}{l}
 8 \times x + 8 \times 2 = 6x - 8 \quad \text{① On développe} \\
 8x + 16 - 6x = 6x - 8 - 6x \quad \text{② On ne veut que des nombres à droite du =} \\
 2x + 16 = -8 \quad \text{On doit faire disparaître le +3 à gauche} \\
 2x + 16 - 16 = -8 - 16 \quad \text{③ On ne veut que des } x \text{ à gauche du =} \\
 2x = -24 \quad \text{On doit faire disparaître le 2 devant le } x \text{ à gauche} \\
 \frac{2x}{2} = \frac{-24}{2} \\
 x = -12 \quad \text{④ On veut } x \text{ tout seul}
 \end{array}$$

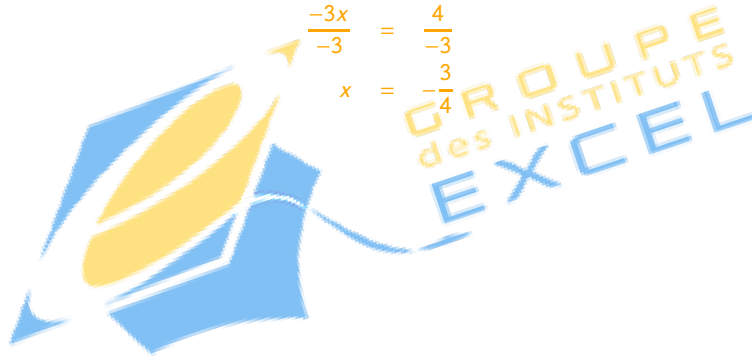
Donc  $\mathcal{S} = \{-12\}$ .

■ **EXERCICE :** Résoudre l'équation  $7x - 13 = 10x - 9$ .

Solution :

$$\begin{array}{l}
 7x - 13 = 10x - 9 \\
 7x - 13 - 10x = 10x - 9 - 10x \\
 -3x - 13 = -9 \\
 -3x - 13 + 13 = -9 + 13 \\
 -3x = 4 \\
 \frac{-3x}{-3} = \frac{4}{-3} \\
 x = -\frac{4}{3}
 \end{array}$$

Donc  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$ .



## 2. Quand la méthode ne fonctionne pas

Souvent, pour résoudre certaines équations, il faut se ramener à un type d'équation qu'on sait résoudre. Pour cela il faut utiliser les outils suivants : réduction, développement ou factorisation.

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation  $(8x - 5)^2 - 49 = 0$ .

Réponse :

$$\begin{array}{l}
 (8x - 5)^2 - 49 = 0 \\
 (8x - 5)^2 - 7^2 = 0 \quad \text{← On fait apparaître l'IR n°3} \\
 ((8x - 5) - 7)((8x - 5) + 7) = 0 \quad \text{← On factorise} \\
 (8x - 5 - 7)(8x - 5 + 7) = 0 \\
 (8x - 12)(8x + 2) = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 8x - 12 = 0 \\
 8x - 12 + 12 = 0 + 12 \\
 \frac{8x}{8} = \frac{12}{8} \\
 x = \frac{3}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 8x + 2 = 0 \\
 8x + 2 - 2 = 0 - 2 \\
 \frac{8x}{8} = \frac{-2}{8} \\
 x = -\frac{1}{4}
 \end{array}$$

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :

Donc  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right\}$ .

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation  $(4x + 3)^2 = 16x^2 + 5x - 1$

Réponse :

$$\begin{aligned}(4x + 3)^2 &= 16x^2 + 5x - 1 \\(4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 &= 16x^2 + 5x - 1 \quad \leftarrow \text{On développe avec l'IR ①} \\16x^2 + 24x + 9 &= 16x^2 + 5x - 1 \\16x^2 + 24x + 9 - 16x^2 &= 16x^2 + 5x - 1 - 16x^2 \\24x + 9 &= 5x - 1 \\24x + 9 - 5x &= 5x - 1 - 5x \\19x + 9 &= -1 \\19x + 9 - 9 &= -1 - 9 \\19x &= -10 \\ \frac{19x}{19} &= \frac{-10}{19} \\x &= -\frac{10}{19}\end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{10}{19} \right\}$ .

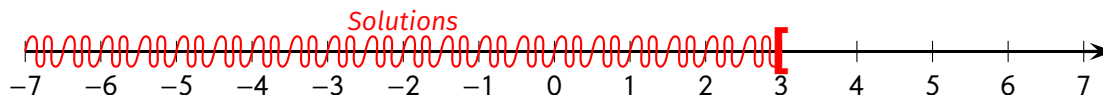


## IV – Inéquations

### 1. Inégalité et représentation graphique

Exemple 1 : Représenter l'ensemble des nombres  $x$  qui vérifient  $x < 3$

Réponse :

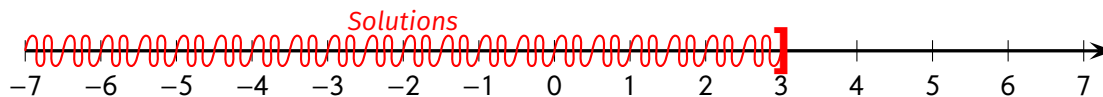


#### Remarque

Le crochet n'est pas "tourné" vers les solutions car  $x$  ne peut pas être égal à 3 (symbole  $<$ ).

Exemple 2 : Représenter l'ensemble des nombres  $x$  qui vérifient  $x \leq 3$

Réponse :

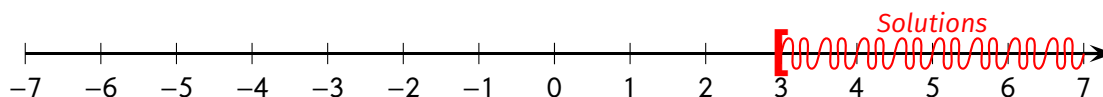


#### Remarque

Le crochet est cette fois "tourné" vers les solutions car  $x$  peut être égal à 3 (symbole  $\leq$ ).

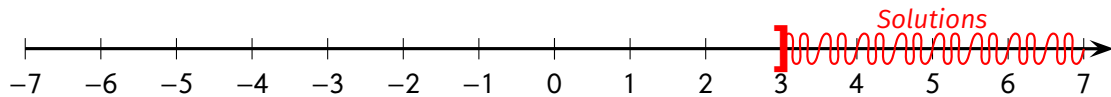
Exemple 3 : Représenter l'ensemble des nombres  $x$  qui vérifient  $x \geq 3$

Réponse :



Exemple 4 : Représenter l'ensemble des nombres  $x$  qui vérifient  $x > 3$

Réponse :



## 2. Résoudre une inéquation

### Méthode (RÉSOUTRE UNE INÉQUATION)

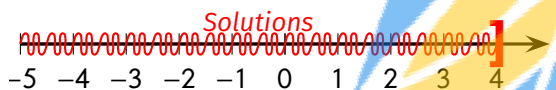
On utilise la même méthode que pour les équations avec deux différences :

- On change le sens de l'inégalité quand on divise (ou multiplie) par un nombre négatif à l'étape 4.
- On représente les solutions sur une droite graduée.

Le plus simple pour bien comprendre est de voir plusieurs exemples :

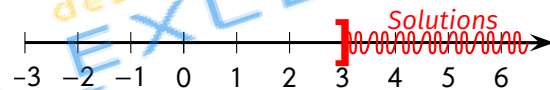
Exemple 1 : On veut résoudre :  $x + 5 \leq 9$  :

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 9 \\ x + 5 - 5 &\leq 9 - 5 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$



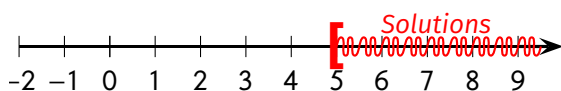
Exemple 2 : On veut résoudre :  $x - 5 > -2$  :

$$\begin{aligned} x - 5 &> -2 \\ x - 5 + 5 &> -2 + 5 \\ x &> 3 \end{aligned}$$



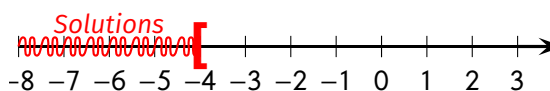
Exemple 3 : On veut résoudre  $4x \geq 20$  :

$$\begin{aligned} 4x &\geq 20 \\ \frac{4x}{4} &\geq \frac{20}{4} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On ne change pas le sens de l'inégalité} \\ \text{car on divise par un nombre positif} \end{array} \right\} \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$



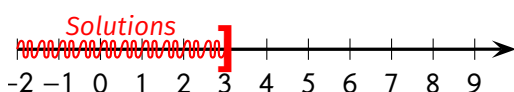
Exemple 4 : On veut résoudre  $-2x > 8$  :

$$\begin{aligned} -2x &> 8 \\ \frac{-2x}{-2} &< \frac{8}{-2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On change le sens de l'inégalité car} \\ \text{on divise par un nombre négatif} \end{array} \right\} \\ x &< -4 \end{aligned}$$



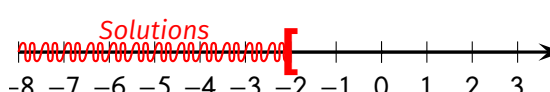
Exemple 5 : On veut résoudre  $10x - 4 \leq 26$  :

$$\begin{aligned} 10x - 4 + 4 &\leq 26 + 4 \\ 10x &\leq 30 \\ \frac{10x}{10} &\leq \frac{30}{10} \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$



Exemple 6 : On veut résoudre  $-5x + 7 > 8$  :

$$\begin{aligned} -5x + 7 - 7 &> 17 - 7 \\ -5x &> 10 \\ \frac{-5x}{-5} &< \frac{10}{-5} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On change le sens de l'inégalité car} \\ \text{on divise par un nombre négatif} \end{array} \right\} \\ x &< -2 \end{aligned}$$



## V – Résoudre des problèmes

### Méthode (RÉSOUTRE DES PROBLÈMES)

1. Choix de l'inconnue,
2. Mise en (in)équation,
3. Résolution de l'(in)équation,
4. Phrase de conclusion.

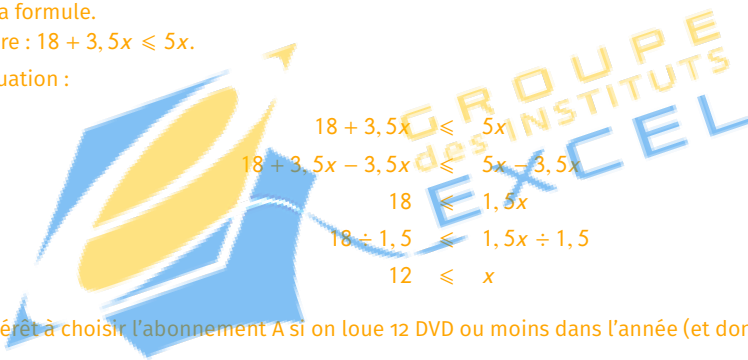
■ **EXERCICE :** Un vidéo-club propose deux formules de location de DVD :

- Formule A : abonnement d'un an pour 18 €, puis 3,5 € par DVD loué.
- Formule B : sans abonnement, 5 € par DVD loué.

À partir de combien de DVD loués dans l'année a-t-on intérêt à choisir la formule A ?

Solution :

- Choix de l'inconnue :  $x$  représente le nombre de DVD loués.
- Mise en inéquation :  
Montant d'un an d'abonnement avec la formule A :  $18 + 3,5x$   
Montant d'un an d'abonnement avec la formule B :  $5x$   
On cherche quand le montant de l'abonnement avec la formule A est avantageux, c'est-à-dire quand il coûte moins cher que l'abonnement avec la formule.  
On doit donc résoudre :  $18 + 3,5x \leq 5x$ .
- Résolution de l'inéquation :


$$\begin{aligned}18 + 3,5x &\leq 5x \\18 + 3,5x - 3,5x &\leq 5x - 3,5x \\18 &\leq 1,5x \\18 \div 1,5 &\leq 1,5x \div 1,5 \\12 &\leq x\end{aligned}$$

- Conclusion : On a intérêt à choisir l'abonnement A si on loue 12 DVD ou moins dans l'année (et donc l'abonnement B à partir de 13 DVD loués).

■ **EXERCICE :** Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € pour faire, en moyenne, 150 glaces.

Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces au minimum dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?

Solution :

- On note  $x$  le nombre de glaces vendues dans la semaine.
- Mise en inéquation :  
Bénéfice de la semaine :  $2,5x - 75$   
On veut que ce bénéfice soit supérieur à 76 €, cela se traduit donc par l'inéquation :  $2,5x - 75 > 76$ .
- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned}2,5x - 75 &> 76 \\2,5x - 75 + 75 &> 76 + 75 \\2,5x &> 151 \\2,5x \div 2,5 &> 151 \div 2,5 \\x &> 60,4\end{aligned}$$

- Conclusion : le marchand devra vendre au moins 61 glaces pour faire un bénéfice supérieur à 76 € dans la semaine.