

# Groupe des Instituts Excel

## Écritures littérales, identités remarquables

Extrait du programme de la classe de Troisième :

CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
Écritures littérales ; identités remarquables	Factoriser des expressions telles que : $(x + 1)(x + 2) - 5(x + 2)$ ; $(2x + 1)^2 + (2x + 1)(x + 3)$ Connaître les égalités : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . et les utiliser sur des expressions numériques ou littérales simples telles que : $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 200 + 1$ ; $(x + 5)^2 - 4 = (x + 5)^2 - 2^2 = (x + 5 + 2)(x + 5 - 2)$	La reconnaissance de la forme d'une expression algébrique faisant intervenir une identité remarquable peut représenter une difficulté qui doit être prise en compte. Les travaux s'articuleront sur deux axes : – utilisation d'expressions littérales pour des calculs numériques ; – utilisation du calcul littéral dans la mise en équation et la résolution de problèmes. Les activités viseront à assurer la maîtrise du développement d'expressions simples ; en revanche, le travail sur la factorisation qui se poursuivra au lycée, ne vise à développer l'autonomie des élèves que dans des situations très simples. On consolidera les compétences en matière de calcul sur les puissances, notamment sur les puissances de 10.

### 11.1 Développer un produit



#### Définition

**Développer** un produit signifie le transformer en une **somme algébrique**

*Rappel : une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions, impliquant des nombres et/ou des lettres*

Nous avons, pour réaliser cela, plusieurs moyens à disposition :

### 11.1.1 Distributivité simple

Produit	→	Somme algébrique
$k(a + b)$ 	→	$ka + kb$
$k(a - b)$ 	→	$ka - kb$

Applications et exemples :

– Calcul mental :

$$\blacktriangleright 13 \times 99 = 13 \times (100 - 1) = 13 \times 100 - 13 \times 1 = 1300 - 13 = 1287$$

$$\blacktriangleright 25 \times 104 = 25 \times (100 + 4) = 25 \times 100 + 25 \times 4 = 2500 + 100 = 2600$$

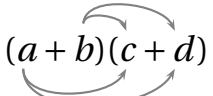
– Développement d'une expression littérale :

$$\blacktriangleright 3(5a + 7) = 3 \times 5a + 3 \times 7 = 15a + 21$$

$$\blacktriangleright -2(5 - 4x) = -2 \times 5 - (-2) \times 4x = -10 + 8x$$

GRUPE  
des INSTITUTS  
EXCEL

### 11.1.2 Distributivité double

Produit	→	Somme algébrique
$(a + b)(c + d)$ 	→	$ac + ad + bc + bd$

Applications et exemples :

Développement d'une expression littérale :

$$\blacktriangleright (3 - a)(4a + 2) = 3 \times 4a + 3 \times 2 - a \times 4a - a \times 2 = 12a + 6 - 4a^2 - 2a = -4a^2 + 10a + 6$$

$$\blacktriangleright (3x - 2)(1 - 4x) = 3x \times 1 + 3x \times (-4x) - 2 \times 1 - 2 \times (-4x) = 3x - 12x^2 - 2 + 8x = -12x^2 + 11x - 2$$

⚠ : Pour ne pas se tromper dans les signes, il est utile de se souvenir que, par exemple,  $3x - 2$  est la somme de  $3x$  et de  $-2$ , et que  $1 - 4x$  est la somme de  $1$  et de  $-4x$ . Ainsi, pour le calcul précédent, on a :

$$(3x - 2)(1 - 4x) = (3x + (-2))(1 + (-4x)) = (3x) \times 1 + (3x) \times (-4x) + (-2) \times 1 + (-2) \times (-4x) = \dots$$

### 11.1.3 Identités remarquables

Produit	→	Somme algébrique
Carré d'une somme		
$(a + b)^2$	→	$a^2 + 2ab + b^2$
Carré d'une différence		
$(a - b)^2$	→	$a^2 - 2ab + b^2$
Produit d'une somme par une différence		
$(a - b)(a + b)$	→	$a^2 - b^2$

Applications et exemples :

– Calcul mental :

$$\blacktriangleright 101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 + 1^2 = 10000 + 200 + 1 = 10201$$

$$\blacktriangleright 19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$$

$$\blacktriangleright 39 \times 41 = (40 - 1)(40 + 1) = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$$

– Développement d'une expression littérale :

$$\blacktriangleright (y + 7)^2 = y^2 + 2 \times y \times 7 + 7^2 = y^2 + 14y + 49$$

$$\blacktriangleright (1 - 3x)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 3x + (3x)^2 = 1 - 6x + 9x^2$$

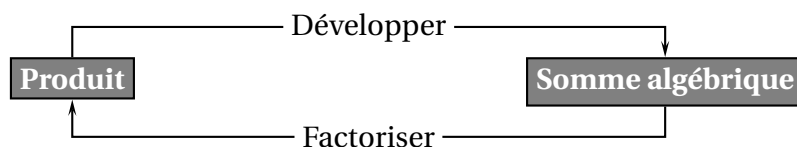
$$\blacktriangleright (20 - 8x)(20 + 8x) = 20^2 - (8x)^2 = 400 - 64x^2$$

## 11.2 Factoriser une somme algébrique

### Définition

**Factoriser** une somme algébrique signifie la transformer en **produit**

En fait, pour résumer :



### 11.2.1 Avec un facteur commun

On utilise la propriété de simple distributivité, mais "à l'envers" :

Somme algébrique	→	Produit
$\underline{k}a + \underline{k}b$	→	$\underline{k}(a + b)$
$\underline{k}a - \underline{k}b$	→	$\underline{k}(a - b)$

Dans les sommes algébriques de gauche, il y a deux termes, chacun étant un produit de deux facteurs. Comme  $k$  se retrouve dans les deux termes, on dit que c'est un **facteur commun** aux deux termes. On dit également que l'on a "**mis  $k$  en facteur**".

### Applications et exemples :

#### – Calcul mental :

$$\blacktriangleright 13 \times 62 + 13 \times 38 = 13 \times (62 + 38) = 13 \times 100 = 1300$$

$$\blacktriangleright 18.1 \times 34.8 - 8.1 \times 34.8 = (18.1 - 8.1) \times 34.8 = 10 \times 34.8 = 348$$

#### – Factorisation d'une expression littérale grâce à un facteur commun :

$$\blacktriangleright 4a^2 + 3a = 4 \times a \times a + 3 \times a = a(4a + 3)$$

$$\blacktriangleright (x + 7)(5 - 4x) - 2(5 - 4x) = (5 - 4x) \times (x + 7 - 2) = (5 - 4x)(x + 5)$$

$$\blacktriangleright (x + 3)^2 - 5(x + 3) = (x + 3) \times (x + 3 - 5) = (x + 3)(x - 2)$$

### 11.2.2 Avec les identités remarquables

Là aussi, on utilise les identités remarquables vues au paragraphe 1.3, mais "dans l'autre sens" :

Somme algébrique	→	Produit
$a^2 + 2ab + b^2$	→	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	→	$(a - b)^2$
$a^2 - b^2$	→	$(a - b)(a + b)$

#### Applications à la factorisation d'expressions littérales :

$$\blacktriangleright y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \times y \times 2 + 2^2 = (y + 2)^2$$

$$\blacktriangleright 9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x - 1)^2$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright (x + 5)^2 - 9 &= (x + 5)^2 - 3^2 \\ &= [(x + 5) - 3] \times [(x + 5) + 3] \\ &= (x + 2) \times (x + 8) \end{aligned}$$