Groupe des Instituts Excel

ORDRE ET OPÉRATIONS

Objectifs d'apprentissage

- Comparer deux nombres relatifs.
- Maîtriser les propriétés de l'ordre et des opérations.
- Ecrire un encadrement d'un nombre relatif.
- Utiliser les propriétés de l'ordre dans la résolution des problèmes.

Prérequis

- Comparer deux nombres rationnels.
- Utiliser les propriétés de l'ordre et l'addition.
- Utiliser les propriétés de l'ordre et la multiplication par un nombre positif.

Activités

Activité 1 : 1) Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	Comparaison de a et b	a-b	Signe de a-b
4	5			
3	-2			
-5	-8			
-7,5	-2,3			

2) A l'aide du tableau, compléter par : $<$ *ou* $>$

* Si : $a - b < 0$ alors $a \ldots b$

* Si : $a - b > 0$ alors $a \ldots b$

Activité 2 : a, b et c sont des nombres réels tel que a> b.

1) calculer la différence de a + c et b + c.

2) Déduis-en la comparaison de a + c et b + c.

3) compare a - c et b – c en procédant de la même façon.

4) Enonce les règles que tu viens de démontrer.

Contenu de la leçon

I- Comparaison de deux nombres réels :

*** Propriété :** Soient a *et* b deux nombres réels :

- Si $a - b < 0$ alors $a < b$
- Si $a - b > 0$ alors $a > b$
- Si $a - b = 0$ alors $a = b$

*** Exemple :** * On compare : $\frac{3}{5}$ *et* $\frac{6}{7}$

On a : $\frac{3}{5} - \frac{6}{7} = \frac{21}{35} - \frac{30}{35} = \frac{-9}{35}$

Puisque : $\frac{-9}{35} < 0$

Alors : $\frac{3}{5} < \frac{6}{7}$

II- Ordre et opérations :

1) Ordre et addition – ordre et soustraction :

*** Propriété :** Soient a, b *et* c trois nombres réels :

- Si $a < b$ alors $a + c < b + c$
- Si $a < b$ alors $a - c < b - c$

*** Exemple :** * On compare : $3 + \sqrt{7}$ *et* $8 + \sqrt{7}$

On a : $3 < 8$ alors $3 + \sqrt{7} < 8 + \sqrt{7}$

** Si $x > 3$, comparer : $x - 5$ *et* -2

On a $x > 3$ alors $x - 5 > 3 - 5$, donc $x - 5 > -2$

*** Propriété :** Soient a, b, c *et* d des nombres réels :

- Si $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases}$ alors $a + c < b + d$

*** Exemple :** * a et b deux nombres réels tel que $a < 4$ *et* $3 > b$.

Evaluation

Exercice 1 : Comparer les nombres suivants :

1) $a = \frac{4}{7}$ *et* $b = \frac{-5}{6}$

2) $a = \frac{3}{2}$ *et* $b = \frac{4}{5}$

3) $a = \frac{-2}{5}$ *et* $b = \frac{-3}{4}$

4) $a = \sqrt{3} - 4$ *et* $b = \sqrt{3} - 5$

5) $a = -3\sqrt{2} - 1$ *et* $b = \sqrt{2} + 7$

Exercice 2 : Soient a *et* b deux nombres réels tels que : $a \geq -8$ *et* $b \geq 5$

Montrer que :

1) $a + 4 \geq -4$

2) $b - \frac{1}{2} \geq \frac{9}{2}$

3) $a + b \geq -3$

Exercice 3 : Compléter :

$x > 6$ $x + 1 >$	$x > 6$ $x + 7 >$	$x > 6$ $x - 4 >$ .....
$x \geq -4$ $x + 1$	$x \geq -4$ $x + 7$	$x \geq -4$ $x - 4$ ....
$x > 5$ $2x >$	$x > 8$ $\frac{1}{2} x >$	$x > -12$ $\frac{3}{4} x >$ .....

Activités

Activité 3 : ***activité : 6 – page : 43***

Activité 4 : *1)* Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	a<b ou a>b	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ ou $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
2	8				
-5	-10				

2) Enoncer la propriété que tu viens de démontrer.

Contenu de la leçon

Montrer que : $\boldsymbol{a+b<7}$.

On a : $\begin{cases}\boldsymbol{a<4}\\ \boldsymbol{b<3}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{a+b<4+3}$ donc $\boldsymbol{a+b<7}$.

2) Ordre et multiplication :

*** Propriété :** Soient $a, b\ et\ c$ des nombres réels :

- Si $\begin{cases}\boldsymbol{a<b}\\ \boldsymbol{c>0}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c<b\times c}$
- Si $\begin{cases}\boldsymbol{a<b}\\ \boldsymbol{c<0}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c>b\times c}$

*** Exemple :** * Soit x un nombre réel tel que $\boldsymbol{x<3}$. Comparons $-4x\ et\ -12$.

On a : $\begin{cases}\boldsymbol{x<3}\\ \boldsymbol{-4<0}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{-4\times x>-4\times 3}$ donc $\boldsymbol{-4x>-12}$.

*** Remarque :** Soient $a\ et\ b$ deux nombres réels :

- Si $\boldsymbol{a<b}$ alors $\boldsymbol{-a>-b}$

*** Propriété :** Soient $a, b, c\ et\ d$ des nombres réels ***positifs*** :

- Si $\begin{cases}\boldsymbol{a<b}\\ \boldsymbol{c<d}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{a\times c<b\times d}$

*** Exemple :** * Soit $x\ et\ y$ deux nombre réels positifs tel que $x<\sqrt{3}\ et\ y<2\sqrt{6}$. Montrer que : $xy<6\sqrt{2}$.

On a : $\begin{cases}\boldsymbol{x<\sqrt{3}}\\ \boldsymbol{y<2\sqrt{6}}\end{cases}$ alors $\boldsymbol{x\times y<\sqrt{3}\times 2\sqrt{6}}$ donc $\boldsymbol{xy<2\sqrt{18}}$

Puisque : $2\sqrt{18}=2\sqrt{9\times 2}=2\sqrt{9}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Alors : $\boldsymbol{xy<6\sqrt{2}}$.

3) Ordre et inverse :

Evaluation

Exercice 4 : Compléter :

$x<12$ $x+4<$	$x<5$ $x-1<$	$x<13$ $x-14<$ .....
$x\geq 2$ $3x$ …….	$x\geq 5$ $-2x$ …….	$x\geq -4$ $5x$ …….
$x>3$ $-x$ ……..	$x>-4$ $7x$ …….	$x>18$ $0{,}5x$ …….

Exercice 5 : Comparer les nombres suivants :

1) $a=\sqrt{8}\quad et\quad b=3$
2) $a=3\sqrt{5}\quad et\quad b=\sqrt{37}$
3) $a=2\sqrt{5}\quad et\quad b=5$
4) $a=2\sqrt{3}\quad et\quad b=3\sqrt{2}$
5) $a=\sqrt{5}\quad et\quad b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
6) $a=6+\sqrt{3}\quad et\quad b=6+\sqrt{5}$
7) $a=20\sqrt{2}\quad et\quad b=-7\sqrt{14}$
8) $a=-\sqrt{3}\quad et\quad b=-2\sqrt{10}$
9) $a=-10\sqrt{2}\quad et\quad b=-9\sqrt{3}$
10) $a=2+2\sqrt{2}\quad et\quad b=2+\sqrt{10}$
11) $a=2\sqrt{3}+\sqrt{11}\quad et\quad b=\sqrt{11}+\sqrt{10}$
12) $a=1+\sqrt{6}\quad et\quad b=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
13) $a=\sqrt{17}-\sqrt{11}\quad et\quad b=\sqrt{5}-\sqrt{40}$
14) $a=3+\sqrt{3}\quad et\quad b=\sqrt{27}+1$

Activités

Activité 5 : **A-** a et b deux nombres réels positifs

1) *démontrer que le signe de* $a^2 - b^2$ *est le meme signe de* $a - b$

2) *démontere que si* $a \leq b$ *donc* $a^2 \leq b^2$

B- a et b sont deux réels négatifs

1) *démontrer que le signe de* $a^2 - b^2$ *est le signe contraire de* $a - b$

2) *démontere que si* $a \leq b$ *donc* $a^2 \geq b^2$

Contenu de la leçon

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels :

- Si $a < b$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

*** Exemple :** * On a : $2 < 8$ $alors$ $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

* On a : $-10 < -5$ $alors$ $\frac{1}{-10} > \frac{1}{-5}$

4) Ordre et carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***positifs*** :

- Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
- Si $a^2 < b^2$ alors $a < b$.

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***négatifs*** :

- Si $a < b$ alors $a^2 > b^2$.
- Si $a^2 > b^2$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{41}$

$On\ a :$ $\begin{cases} (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45 \\ (\sqrt{41})^2 = 41 \end{cases}$ donc : $(3\sqrt{5})^2 > (\sqrt{41})^2$

Puisque $3\sqrt{5}$ et $\sqrt{41}$ deux nombres positifs, alors : $3\sqrt{5} > \sqrt{41}$.

5) Ordre et racine carré :

*** Propriété :** Soient a et b deux nombres réels ***positifs*** :

- Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
- Si $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ alors $a < b$.

*** Exemple :** * Comparons : $\sqrt{15}$ et $\sqrt{19}$

Puisque : $15 < 19$ $alors$ $\sqrt{15} < \sqrt{19}$

Evaluation

Exercice 6 : 1) Comparer les nombres $7\sqrt{2}$ et $5\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\frac{1}{7\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

2) Comparer les nombres $5\sqrt{2}$ et $4\sqrt{3}$ puis déduire la comparaison des nombres $\sqrt{4\sqrt{3}+7}$ et $\sqrt{5\sqrt{2}+7}$.

Exercice 7 : 1) Comparer les nombres :

$\frac{13}{5}$ et $\frac{12}{7}$

2) Déduire la comparaison de :

$\frac{13}{5} \times (-3)^{11}$ et $\frac{12}{7} \times (-3)^{11}$.

3) Comparer les nombres :

$3\sqrt{3}$ et $\sqrt{11} + 4$

4) Déduire la comparaison de :

$\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt{10}$ et $\frac{1}{\sqrt{11}+4} - \sqrt{10}$

Activités

Activité 6 : Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que :

$x \leq a \leq y$ et $z \leq b \leq t$

1) Montrer que : $a+b \leq y+t$

Et $x+z \leq a+b$

2) En déduire un encadrement de :

$a+b$

3) Démontrer que $-t \leq -b$

$et\ -b \leq -z$

4) déduire un encadrement de –b

5) déduire l'encadrement de a-b

(remarquer que a-b=a+(-b))

Contenu de la leçon

III- Encadrement :

1) Encadrement et addition :

*** Propriété :** Soient $a, b, c, d, x\ et\ y$ des nombres réels :

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $a+c \leq x+y \leq b+d$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $3 \leq x \leq 8\ \ et$

$-4 \leq y \leq 2$. Encadrer : $x+y$.

On a : $\begin{cases} 3 \leq x \leq 8 \\ -4 \leq y \leq 2 \end{cases}$ donc : $3+(-4) \leq x+y \leq 8+2$,

alors : $-1 \leq x+y \leq 10$

2) Encadrement et opposé :

*** Propriété :** Soient $a, b\ et\ x$ des nombres réels :

Si $a \leq x \leq b$ alors $-b \leq -x \leq -a$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7\ \ et$

$-1 \leq y \leq 5$. Encadrer : $-x\ et\ -y$.

$\Longrightarrow On\ a : 2 \leq x \leq 7\ alors :\ -7 \leq -x \leq -2.$

$\Longrightarrow On\ a : -1 \leq y \leq 5\ alors :\ -5 \leq -y \leq 1.$

3) Encadrement et soustraction :

*** Propriété :** Soient $a, b, c, d, x\ et\ y$ des nombres réels :

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $a-d \leq x-y \leq b-c$.

*** Exemple :** * $x\ et\ y$ deux nombres réels tels que : $2 \leq x \leq 7\ \ et$

$-1 \leq y \leq 5$. Encadrer : $x-y$.

On a : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -1 \leq y \leq 5 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} 2 \leq x \leq 7 \\ -5 \leq -y \leq 1 \end{cases}$,

alors : $2+(-5) \leq x+(-y) \leq 7+1$, d'où : $-3 \leq x-y \leq 8$

Evaluation

Exercice 8 : x et y deux nombres réels tel

que : $2 \leq x \leq 5\ \ et\ \ 1 \leq y \leq 4$

Encadrer :

$x+5\ ;\ 3x\ ;\ -5y\ ;\ y-3\ ;\ xy\ ;$

$\frac{1}{x}\ ;\ \frac{1}{y}\ ;\ x+y\ ;\ x-y\ ;\ \frac{1}{x+y}\ ;$

$\frac{x-y}{x+y}\ ;\ 2x+y\ ;\ -4x+3y\ ;\ 3x-2y$

Activités

Activité 7 : *A-* Soient a, b, x, y, z et t des nombres réels tels que :

$(a > 0 \quad et \quad b > 0)$

$x \leq a \leq y$ et $z \leq b \leq t$

1) Montrer que : $a \times b \leq y \times t$

Et $x \times z \leq a \times b$

2) En déduire l'encadrement de : $a \times b$

3) On considère que b<0, montrer que

$a \times b \leq y \times z \quad et \quad x \times t \leq a \times b$

B- On considère que $a \neq 0$ et

$x \neq 0$ et $y \neq 0$

4) Montrer que $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a}$

5) Déduire l'encadrement de $\frac{1}{a}$

On considère que $b \neq 0$ et

$t \neq 0$ et $z \neq 0$

6) Donner l'encadrement de $\frac{1}{b}$

7) Déduire l'encadrement de $\frac{a}{b}$

Contenu de la leçon

4) Encadrement et multiplication :

*** Propriété :** Soient a, b, c, d, x et y des nombres réels ***positifs*** :

Si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ alors $ac \leq xy \leq bd$.

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $1 \leq x \leq 7$ et $4 \leq y \leq 6$. Encadrer : xy.

On a : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 7 \\ 4 \leq y \leq 6 \end{cases}$ donc : $1 \times 4 \leq x \times y \leq 7 \times 6$, alors : $4 \leq xy \leq 42$

5) Encadrement et inverse :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels ***positifs*** :

Si $a \leq x \leq b$ alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$.

*** Exemple :** * x un nombre réel tel que : $5 \leq x \leq 9$. Encadrer : $\frac{1}{x}$.

On a : $5 \leq x \leq 9$ $alors$: $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$

6) Encadrement et carré, encadrement et racine carrée :

*** Propriété :** Soient a, b et x des nombres réels ***positifs*** :

Si $a \leq x \leq b$ alors $a^2 \leq x^2 \leq b^2$ ***et*** $\sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b}$.

*** Exemple :** * x et y deux nombres réels tels que : $16 \leq x \leq 25$ et $-3 \leq y \leq -2$. Encadrer : $\sqrt{x}$ et y^2.

$\Longrightarrow$ $On\ a : 16 \leq x \leq 25, donc : \sqrt{16} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{25}, alors : 4 \leq \sqrt{x} \leq 5$

$\Longrightarrow$ $On\ a : -3 \leq y \leq -2, donc : 2 \leq -y \leq 3, donc : 2^2 \leq (-y)^2 \leq 3^2$

$Alors : 4 \leq y^2 \leq 9$

Evaluation

Exercice 9 : Soit a et b deux nombres réels tels que :

$$1 \leq \frac{a-4}{2} \leq \frac{3}{2} \quad et \quad -5 \leq b \leq -4$$

1) Montrer que : $6 \leq a \leq 7$

2) Encadrer les nombres : $a + b$;

$a \times b$; $3a - 2b$

3) Montrer que : $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{a}{a+b}} \leq \sqrt{7}$