

Groupe des Instituts Excel

FONCTIONS LINÉAIRES & PROPORTIONNALITÉ

I – Fonction linéaire

1. Définition

Définition

On appelle **fonction linéaire** toute fonction de la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre connu.

Exemples : Les fonctions suivantes sont linéaires :

- $f(x) = 4x$; ici $a = 4$.
- $g : x \mapsto -6x$; ici $a = -6$.
- $h(x) = -2,7x$; ici $a = -2,7$.
- $i(x) = \frac{4}{2}x$; ici $a = \frac{4}{2} = 2$.
- $j(x) = \sqrt{5}x$; ici $a = \sqrt{5} \approx 2,24$.

Les fonctions suivantes ne sont pas linéaires, mais pourquoi ?

$$f(x) = 4x + 5 ; g(x) = \frac{3}{2}x + 1 ; h(x) = \sqrt{2}x + 5.$$

f : à cause du $+5$; $g(x) = 1,5x + 1$: à cause de $+1$; h : à cause du $+5$.

Remarque

Les méthodes pour calculer une image ou un antécédent restent les mêmes (voir chapitre « Notions de fonction », page 24).

Propriété

La représentation graphique de la fonction linéaire $f(x) = ax$ est la droite d'équation $y = ax$.

Conséquence

La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.

Exemple : Dans le repère suivant, tracer la représentation graphique de la fonction $f(x) = 2x$.

Réponse :

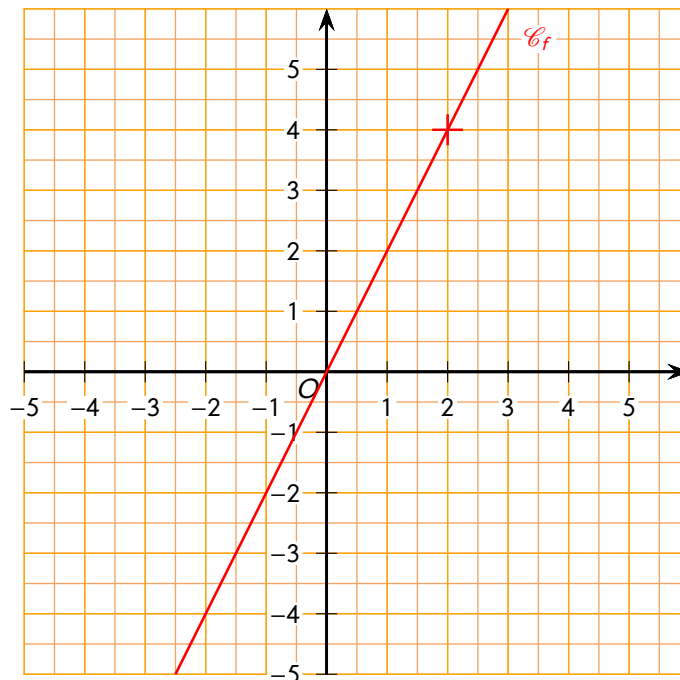
La fonction f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est donc la droite d'équation $y = 2x$ qui passe par l'origine.

Calcul des coordonnées d'un autre point : on choisit par exemple $x = 2$:

$$y = 2 \times 2$$

$$y = 4.$$

Le 2^e point a donc pour coordonnées (2 ; 4).



2. Déterminer l'expression d'une fonction linéaire

Exemple : Déterminer la fonction linéaire f qui vérifie $f(5) = 6$.

Réponse :

f est une fonction linéaire, elle est donc de la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre.

Calcul de a :

$$\begin{aligned} f(5) &= 6 \\ 5a &= 6 \\ \frac{5a}{5} &= \frac{6}{5} \\ a &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Conclusion : $f(x) = \frac{6}{5}x$.

II – Proportionnalité

1. Situations de proportionnalité

Définition

On dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** quand on peut passer de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre s'appelle **coefficient de proportionnalité**.

Exemple : Quand on achète des baguettes de pain, le prix payé au total est proportionnel au nombre de baguettes acheté :

Nombre de baguettes	2	5	12
Prix des baguettes (en €)	1,8	4,5	10,8

) $\times 0,9$

Le coefficient de proportionnalité 0,9 correspond ici au prix d'une baguette.

Propriété

On peut associer à toute situation de proportionnalité (de coefficient de proportionnalité p) la fonction linéaire définie par $f(x) = px$. On dit alors que cette fonction linéaire modélise la situation de proportionnalité.

Exemple : Dans l'exemple précédent, l'achat des baguettes est associé à la fonction linéaire $f(x) = 0,9x$.

Méthode (VÉRIFIER SI UN TABLEAU EST DE PROPORTIONNALITÉ)

Pour vérifier si un tableau représente une situation de proportionnalité, on calcule dans chaque colonne le quotient du premier nombre par le second :

- ◊ Si TOUS les quotients sont égaux, alors il s'agit d'une situation de proportionnalité.
- ◊ Si un ou plusieurs quotients sont différents, alors il ne s'agit pas d'une situation de proportionnalité.

Exemples :

◊ 1^{er} cas :

3	6	15
10	20	50

$$10 \div 3 = \frac{10}{3}$$

$$20 \div 6 = \frac{10}{3}$$

$$50 \div 15 = \frac{10}{3}$$

Pour chaque colonne, on calcule le coefficient permettant de passer d'une ligne à l'autre

On obtient trois fois le même nombre donc c'est un tableau de proportionnalité.

Le coefficient de proportionnalité est $\frac{10}{3}$.

◊ 2^e cas :

5	10	12
35	70	96

$$35 \div 5 = 7$$

$$70 \div 10 = 7$$

$$96 \div 12 = 8$$

Pour chaque colonne, on calcule le coefficient permettant de passer d'une ligne à l'autre

Les coefficients ne sont pas les mêmes donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité.

2. Situations problèmes

Propriété

Pour compléter un tableau de proportionnalité, on utilise le « produit en croix ».

Exemple : Pour faire ses confitures, Elisabeth a acheté 4 kg de sucre pour 10 €. Calculer le prix de 7 kg de sucre.

Réponse :

1. On organise les données sous forme de tableau :

Quantité de sucre en kg	4	7
Prix en €	10	?

2. On utilise le produit en croix pour trouver la valeur manquante : $\frac{10 \times 7}{4} = \frac{70}{4} = 17,5$.

3. Conclusion : 7 kg de sucre coûteront donc 17,50 €.

■ **EXERCICE :** Avec 8 L de vernis, on peint 20 m² de bois.

Quelle surface peut-on couvrir avec un pot de 10 L ?

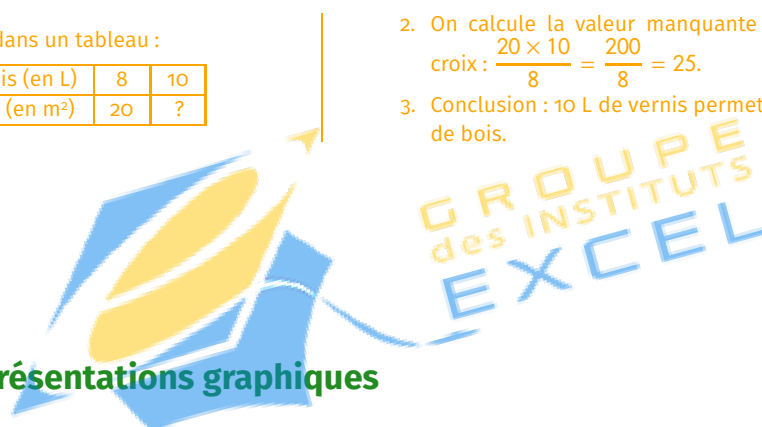
Solution :

1. On organise les données dans un tableau :

Quantité de vernis (en L)	8	10
Surface couverte (en m ²)	20	?

2. On calcule la valeur manquante avec un produit en croix : $\frac{20 \times 10}{8} = \frac{200}{8} = 25$.

3. Conclusion : 10 L de vernis permettent de couvrir 25 m² de bois.

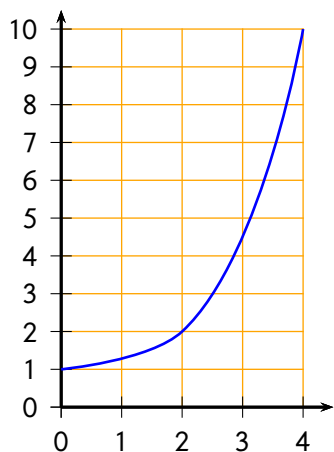


3. Proportionnalité et représentations graphiques

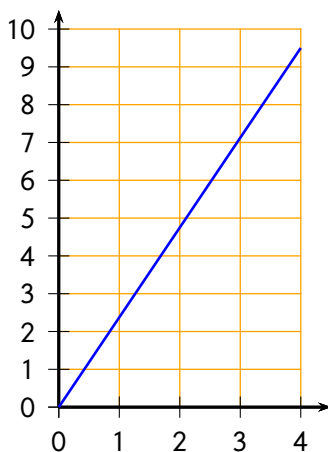
Propriété

- Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors elles sont représentées par une droite passant par l'origine.
- Inversement, si des points sont alignés avec l'origine du repère, alors les deux grandeurs représentées sont proportionnelles.

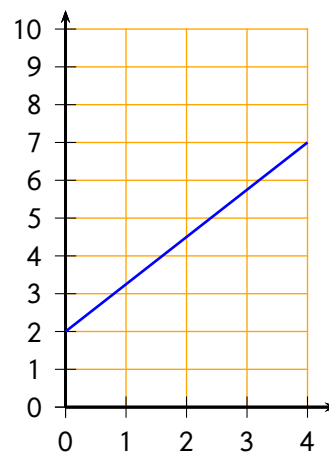
Exemples :



Ce n'est pas une situation de proportionnalité car la courbe n'est pas une droite.



C'est une situation de proportionnalité car la courbe est une droite passant par l'origine.



Ce n'est pas une situation de proportionnalité car la droite ne passe pas par l'origine.

III – Grandeurs

1. Grandeurs composées

Définition

Quand on effectue le produit de deux grandeurs, on obtient une **grandeur produit**.

Exemples :

Aire : L'aire d'un rectangle est donnée par la formule « longueur \times largeur », on multiplie donc des cm avec des cm, le résultat est en cm^2 .

Volume : Le volume d'un solide est donné par la formule « aire de la base \times hauteur », on multiplie donc des m^2 avec des m, le résultat est en m^3 .

Énergie électrique : L'énergie électrique E consommée par un appareil de puissance P kilowatts (kW) pendant t heures est $E = P \times t$. Elle s'exprime donc en kWh .

Définition

Quand on effectue le quotient de deux grandeurs, on obtient une **grandeur quotient**.

Exemples :

Vitesse : C'est la distance parcourue sur la durée du parcours. Elle s'exprime en km/h ou en m/s et s'obtient donc en divisant la distance du parcours par le temps de parcours (voir paragraphe suivant).

Densité de population : La densité de population est le nombre d'habitants sur une surface déterminée. Elle s'exprime en nombre d'habitants par km^2 .

Masse volumique : La masse volumique est le quotient de la masse par le volume. Elle s'exprime en g/m^3 , ou kg/m^3 ...

Débit d'un liquide : Le débit est le quotient du volume par la durée. Il s'exprime en m^3/s .

2. Vitesse moyenne

Propriété

Si D désigne la distance (en km) et T le temps de parcours (en h), alors la vitesse moyenne V (en km/h) est donnée par la formule :

$$V = \frac{D}{T}.$$

Remarques

- L'unité de vitesse dépend de celles de la distance et du temps : par exemple, si la distance est en m et le temps en s, alors la vitesse sera exprimée en m/s .
- Les méthodes et exemples ci-dessous s'appliquent aux autres grandeurs quotient : il suffit de changer les titres des lignes.

Méthode (DÉTERMINER UNE VITESSE MOYENNE)

Richard a parcouru, en faisant du vélo, 52 km en 2h30.
Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

1. On utilise un tableau de proportionnalité :

On écrit les données de l'énoncé en convertissant si besoin

Quand on veut le résultat en km/h, on exprime la distance en km

On exprime la durée en minute

2h30 correspond à 150 min

km/h signifie que la durée est de 1 h = 60 min

résultat correspondant à la vitesse en km/h

Distance (en km)	52	?
Durée (en min)	150	60

2. On calcule la valeur manquante :

$$\frac{52 \times 60}{150} = \frac{3120}{150} = 20,8.$$

3. Conclusion : Richard a roulé en moyenne à 20,8 km/h.

Méthode (DÉTERMINER UNE DISTANCE OU UNE DURÉE)

Un véhicule a roulé à la vitesse moyenne de 66 km/h pendant 1h10.
Quelle distance a-t-il parcouru ?

1. On utilise un tableau de proportionnalité :

On écrit les données de l'énoncé en convertissant si besoin

Quand on veut le résultat en km/h, on exprime la distance en km

On exprime la durée en minutes

66 km/h signifie 66km en 1h et 1h = 60 min

On cherche pour une durée de 1h10 = 70 min

résultat correspondant à la vitesse en km/h

Distance (en km)	66	?
Durée (en min)	60	70

2. On calcule la valeur manquante :

$$\frac{66 \times 70}{60} = \frac{4620}{60} = 77.$$

3. Conclusion : ce véhicule a parcouru 77 km.

Exemple : Un train roule à 280 km/h de moyenne sur une distance de 500 km. Combien de temps va durer ce trajet ?

Réponse :

Distance (en km)	280	500
Durée (en min)	60	?

Calcul : $\frac{60 \times 500}{280} \approx 107.$

Conclusion : le train va mettre 107 minutes, c'est à dire 1h47, pour parcourir les 500 km.

3. Conversions

Exemple : Convertir 20 km/h en m/s :

Réponse :

- On convertit 20 km en mètre : $20 \text{ km} = 20\,000 \text{ m}$ et on convertit 1 h en secondes : $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$.
- On utilise un tableau de proportionnalité :

Distance (en m)	20 000	?
Durée (en s)	3 600	1

- On calcule à l'aide du produit en croix : $\frac{20\,000 \times 1}{3\,600} \approx 5,6$.
- Conclusion : $20 \text{ km/h} = 5,6 \text{ m/s}$.

■ **EXERCICE :** Convertir 10,4 m/s en km/h.

Solution :

- On convertit 10,4 m en km : $10,4 \text{ m} = 0,0104 \text{ km}$ et on convertit 1 h en secondes : $1 \text{ h} = 3\,600 \text{ s}$.
- On utilise un tableau de proportionnalité :

Distance (en km)?	0,0104	
Durée (en s)	1	3 600

- On calcule à l'aide du produit en croix : $\frac{0,0104 \times 3\,600}{1} = 37,44$.
- Conclusion : $10,4 \text{ m/s} = 37,44 \text{ km/h}$.

■ **EXERCICE :** Convertir 5 000 kg/m³ en g/cm³.

Solution :

- On convertit 5 000 kg en g : $5\,000 \text{ kg} = 5\,000\,000 \text{ g}$ et on convertit 1 m³ en cm³ : $1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$.
- On utilise un tableau de proportionnalité :

Masse (en g)	5 000 000	?
Volume (en cm ³)	1 000 000	1

- On calcule à l'aide du produit en croix : $\frac{5\,000\,000 \times 1}{1\,000\,000} = 5$.
- Conclusion : $5\,000 \text{ kg/m}^3 = 5 \text{ g/cm}^3$