

Groupe des Instituts Excel

PROBABILITÉS

I – Vocabulaire

Définition

Un phénomène dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat s'appelle une expérience aléatoire

Exemples :

- Le lancer d'un dé à 6 faces est une expérience aléatoire : on ne sait pas quel nombre va donner le dé mais ce sera forcément 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6.
- Tirer, au hasard, un jeton dans une boîte qui contient 4 jetons oranges et 7 jetons blancs est une expérience aléatoire : on ne sait pas de quelle couleur sera le jeton mais ce sera forcément orange ou blanc.

Définitions

- Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelées issues.
- Un événement est un « regroupement » d'une ou plusieurs issues.

Exemples :

- « Obtenir le nombre 1 » ; « Obtenir le nombre 2 » ; « Obtenir le nombre 3 » ; « Obtenir le nombre 4 » ; « Obtenir le nombre 5 » ; « Obtenir le nombre 6 » sont les issues.
- « Obtenir un nombre pair » ; « Obtenir le nombre 1 » ou encore « Obtenir un multiple de 3 » sont des événements.

Définitions

Un événement qui ne peut pas se réaliser est appelé événement impossible. Un événement qui se réalise toujours est un événement certain

Exemples :

- Lorsque l'on lance un dé à 6 faces, l'événement « Obtenir le nombre 7 » est un événement impossible.
- Lorsque l'on lance une pièce de monnaie, l'événement « Obtenir pile ou face » est un événement certain.

Définition

Deux événements sont dit incompatibles s'il ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemples :

- Lorsque l'on lance un dé à 6 faces, les événements « Obtenir le nombre 1 » et « Obtenir un nombre pair » sont incompatibles.
- De même, quand on tire une carte au hasard dans un jeu de cartes, les événements « Tirer une carte rouge » et « Tirer le roi de trèfle » sont également incompatibles.

Propriété

Lorsque l'on peut déterminer toutes les issues possibles la probabilité d'un événement A est donnée par la formule :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à l'événement } A}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple 1 : On considère l'expérience aléatoire : tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Question : Quelle est la probabilité des événements suivants :

- A : « La carte tirée est une dame » ?
- B : « La carte tirée est une figure rouge » ?

Réponses :

- L'événement A est réalisé quand on tire la dame de cœur, la dame de pique, la dame de carreau ou la dame de trèfle.

Cas favorables : 4 cartes

Cas possibles : 32 cartes

$$\text{Donc } p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

- L'événement B est réalisé quand on tire le roi de cœur, la dame de cœur, le valet de cœur, le roi de carreau, la dame de carreau ou le valet de carreau.

Cas favorables : 6 cartes

Cas possibles : 32 cartes

$$\text{Donc } p(B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

Exemple 2 : On considère l'expérience aléatoire : lancer un dé à six faces et l'événement C : « Obtenir un nombre pair »

Question : quelle est la probabilité de l'événement C ?

Réponse :

L'événement C est réalisé lorsque l'on obtient la face 2, 4 ou 6.

Cas favorables : 3

Cas possibles : 6

$$\text{Donc } p(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

■ **EXERCICE** : Une classe de 3^e est constituée de 25 élèves. Certains sont externes, les autres sont demi-pensionnaires. Le tableau ci-dessous donne la composition de la classe :

	Garçon	Fille	Total
Externe		3	
Demi-Pensionnaire	9	11	
Total			25

Questions :

1. Compléter le tableau.
2. On choisit au hasard un élève de cette classe.
 - (a) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit une fille ?
 - (b) Quelle est la probabilité pour que cet élève soit externe ?
 - (c) Si cet élève est demi-pensionnaire, quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Solution :

1.

	Garçon	Fille	Total
Externe	2	3	5
Demi-Pensionnaire	9	11	20
Total	11	14	25

2. (a) Cas favorables : 14 car il y a 14 filles au total
Cas possibles : 25

Donc la probabilité que cet élève soit une fille est de $\frac{14}{25}$.

- (b) Cas favorables : 5 car il y a 5 élèves externes
Cas possibles : 25

Donc la probabilité que cet élève soit externe est de $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

- (c) Cas possible : 20 car il y a 20 élèves demi-pensionnaires
Cas favorables : 9 car il y a 9 garçons demi-pensionnaires

Donc la probabilité est de $\frac{9}{20}$.

Propriétés

- Une probabilité est comprise entre 0 et 1.
- La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemple 1 : On considère un lancer d'une pièce de monnaie (expérience aléatoire).

La probabilité de l'issue « Obtenir pile » est de $\frac{1}{2}$; celle de l'issue « Obtenir face » est de $\frac{1}{2}$.

La somme des probabilités des issues est donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Exemple 2 : On considère l'expérience aléatoire : lancer un dé à six faces.

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 1 » est $\frac{1}{6}$

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 2 » est $\frac{1}{6}$

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 3 » est $\frac{1}{6}$

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 4 » est $\frac{1}{6}$

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 5 » est $\frac{1}{6}$

• La probabilité de l'issue « Obtenir la face 6 » est $\frac{1}{6}$

La somme des probabilités des issues est donc : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Propriété

$p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ce qui s'écrit aussi $p(A) = 1 - p(\bar{A})$ ou $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire : tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On note A l'événement « La carte tirée est une figure rouge » et B l'événement « La carte tirée n'est pas une figure rouge ».

Calcul de la probabilité de A :

L'événement A est réalisé quand on tire le roi de cœur, la dame de cœur, le valet de cœur, le roi de carreau, la dame de carreau ou le valet de carreau.

Cas favorables : 6 cartes

Cas possibles : 32 cartes

$$\text{Donc } p(A) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

Calcul de la probabilité de B :

L'événement B est l'événement contraire de A , on a donc :

$$p(B) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{16}{16} - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

III – Exemples d'expériences à deux épreuves

Exemple 1 : Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : 2 noires et 3 blanches. On dispose également de deux sacs contenant des jetons : un noir et un blanc.

Le sac noir contient un jeton noir et trois jetons blancs. Le sac blanc contient deux jetons noirs et deux jetons blancs. On extrait une boule au hasard de l'urne puis on tire un jeton dans le sac qui est la même couleur que la boule tirée.

Questions :

1. Construire un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité de chacune des issues.
3. Déterminer la probabilité de l'événement A "la boule et le jeton sont de la même couleur"

Réponses :

1. On note N l'événement « Tirer une boule noire », B l'événement « Tirer une boule blanche », n l'événement « Tirer un jeton noir » et b l'événement « Tirer un jeton blanc ».

Calcul de la probabilité de N :

Cas favorables : 2 car il y a deux boules noires dans l'urne.

Cas possibles : 5 car il y a cinq boules dans l'urne.

$$\text{Donc } p(N) = \frac{2}{5}.$$

Calcul de la probabilité de B :

Cas favorables : 3 car il y a deux boules blanches dans l'urne.

Cas possibles : 5 car il y a cinq boules dans l'urne.

$$\text{Donc } p(B) = \frac{3}{5}.$$

Calcul de la probabilité de n , lorsque l'on tire le jeton dans le sac noir :

Cas favorables : 1 car il y a un seul jeton noir dans le sac noir.

Cas possibles : 4 car il y a quatre jetons dans le sac noir.

$$\text{Donc } p(n) = \frac{1}{4}.$$

Calcul de la probabilité de b , lorsque l'on tire le jeton dans le sac noir :

Cas favorables : 3 car il y a trois jetons blancs dans le sac noir.

Cas possibles : 4 car il y a quatre jetons dans le sac noir.

$$\text{Donc } p(b) = \frac{3}{4}.$$

Calcul de la probabilité de n , lorsque l'on tire le jeton dans le sac blanc :

Cas favorables : 2 car il y a deux jetons noirs dans le sac blanc.

Cas possibles : 4 car il y a quatre jetons dans le sac blanc.

$$\text{Donc } p(n) = \frac{2}{4}.$$

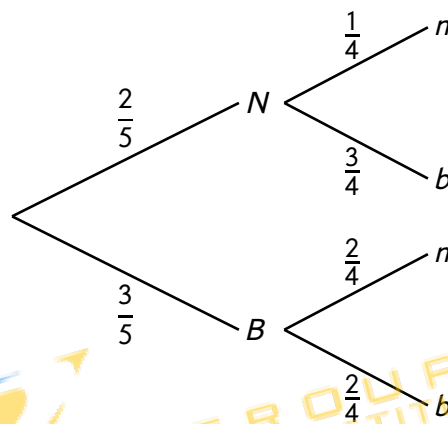
Calcul de la probabilité de b , lorsque l'on tire le jeton dans le sac blanc :

Cas favorables : 2 car il y a deux jetons blancs dans le sac blanc.

Cas possibles : 4 car il y a quatre jetons dans le sac blanc.

$$\text{Donc } p(b) = \frac{2}{4}.$$

Nous obtenons donc l'arbre pondéré suivant :



2. On utilise l'arbre pour calculer la probabilité de chaque issue :

$$\bullet p(N, n) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$$

$$\bullet p(N, b) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$$

$$\bullet p(B, n) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

$$\bullet p(B, b) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

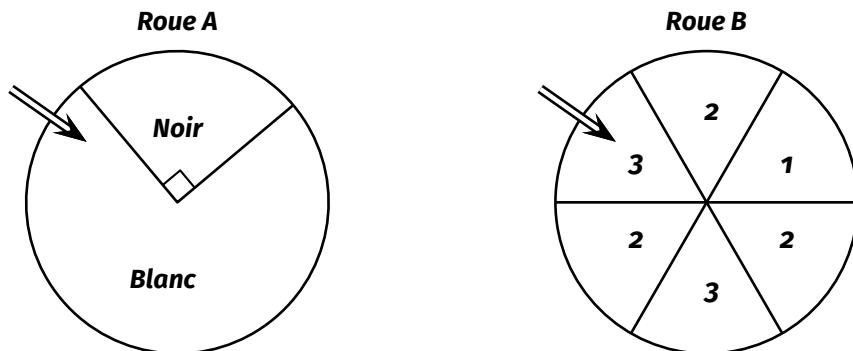
3. L'événement A est réalisé lorsque l'on a (N, n) ou (B, b) ainsi :

$$p(A) = p(N, n) + p(B, b) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

La probabilité de l'événement A est $\frac{2}{5}$.

Exemple 2 : Une expérience consiste à :

- tourner d'abord la roue A (bien équilibrée) : on obtient la couleur blanche ou noire.
- tourner la roue B (bien équilibrée) : on obtient 1, 2 ou 3.



Une issue de cette expérience est par exemple $(N; 1)$; cela signifie que le noir est sorti sur la roue A et le 1 sur la roue B.

1. Déterminer les probabilités de chaque issue de la roue A.
2. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette expérience.
3. Déterminer la probabilité de l'événement $(N; 1)$.
4. Déterminer la probabilité de l'événement A « Obtenir 2 dans le résultat ».

Réponses :

1. L'angle au centre du cercle représentant la roue a une mesure de 360° .

Calcul de la probabilité d'obtenir la couleur noire :

Cas possibles : 360°

Cas favorables : 90°

$$\text{Donc } p(N) = \frac{90}{360} = \frac{1}{4}.$$

Calcul de la probabilité d'obtenir la couleur blanche :

Cas possibles : 360°

Cas favorables : $360 - 90 = 270^\circ$

$$\text{Donc } p(B) = \frac{270}{360} = \frac{3}{4}.$$

2. La roue B est partagée en 6 parties égales.

Calcul de la probabilité d'obtenir 1 :

Cas possibles : 6 car il y a six parties

Cas favorables : 1 car il y a une partie numérotée 1

$$\text{Donc } p(1) = \frac{1}{6}.$$

Calcul de la probabilité d'obtenir 3 :

Cas possibles : 6 car il y a six parties

Cas favorables : 2 car il y a deux parties numérotées 3

$$\text{Donc } p(3) = \frac{2}{6}.$$

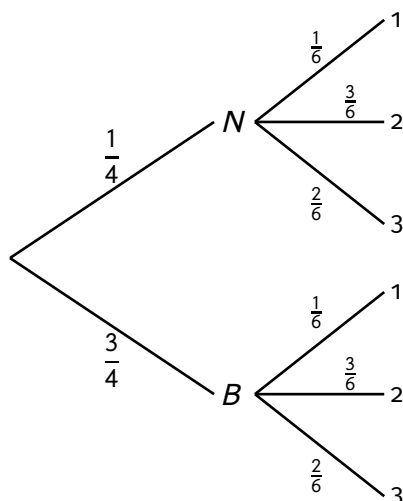
Calcul de la probabilité d'obtenir 2 :

Cas possibles : 6 car il y a six parties

Cas favorables : 3 car il y a trois parties numérotées 2

$$\text{Donc } p(2) = \frac{3}{6}.$$

Nous obtenons donc l'arbre pondéré suivant :



3. D'après l'arbre de probabilité on a :

$$p(N; 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

4. L'événement A est réalisé lorsque l'on a l'issue $(N; 2)$ ou l'issue $(B; 2)$. D'après l'arbre de probabilités on a :

$$p(N; 2) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

$$p(B; 2) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Donc } p(A) = p(N; 2) + p(B; 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

