

## COURS: TRANSLATIONS ET VECTEURS

Extrait du programme de la classe de Troisième :

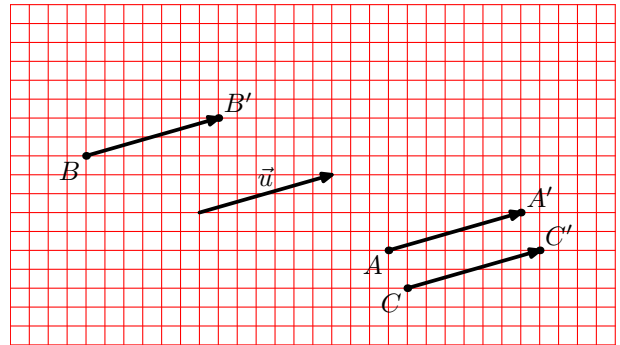
CONTENU	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
<p><b>Vecteurs et translations</b> Égalité vectorielle</p>	<p>► Connaître et utiliser l'écriture vectorielle <math>\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}</math> pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.</p> <p>► Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme ABCD éventuellement aplati.</p>	<p>Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples <math>(A, A')</math>, <math>(B, B')</math>, <math>(C, C')</math>... de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira <math>\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots</math></p> <p>L'un des objectifs est que les élèves se représentent un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur.</p> <p>On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle à l'aide de milieux de <math>[AD]</math> et <math>[BC]</math> : Si <math>\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}</math> alors les segments <math>[AD]</math> et <math>[BC]</math> ont le même milieu. Si les segments <math>[AD]</math> et <math>[BC]</math> ont le même milieu, alors on a <math>\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}</math> et <math>\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}</math>.</p>
<p>Composition de deux translations; somme de deux vecteurs.</p>	<p>► Utiliser l'égalité <math>\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}</math> et la relier à la composée de deux translations.</p> <p>► Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.</p>	<p>Des activités de construction conduiront à l'idée que la composée de deux translations est une translation.</p> <p>À partir de ce résultat, à établir ou admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul <math>\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots</math> ainsi que l'opposé d'un vecteur. Aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle <math>\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}</math> ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle.</p>
<p>Composition de deux symétries centrales.</p>	<p>► Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation.</p> <p>► Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.</p>	<p>Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle.</p> <p>On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation <math>2\overrightarrow{AB}</math> pour désigner <math>\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}</math>.</p> <p>Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme, ainsi que la notation "o" pour désigner la composée.</p>

# 1 Notion de vecteur

## Définition :

Si, par une translation donnée, les points  $A, B, C$  ont pour images respectives les points  $A', B'$  et  $C'$ , alors on dit que les couples de points  $(A, A')$ ,  $(B, B')$ ,  $(C, C')$  définissent un **vecteur**.

Si on note  $\vec{u}$  ce vecteur, alors on peut écrire  $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$ , et on dit que  $\overrightarrow{AA'}$ ,  $\overrightarrow{BB'}$  et  $\overrightarrow{CC'}$  sont des **représentants** du vecteur  $\vec{u}$ .



## Caractéristiques d'un vecteur :

Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts, alors on peut entièrement déterminer le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  par :

- sa **direction** (celle de la droite  $(AB)$ ),
- son **sens** (de  $A$  vers  $B$ )
- et sa **longueur**, ou **norme** (celle du segment  $[AB]$ ).

**Vocabulaire :** Dans ce cas, le point  $A$  est appelé **origine** du vecteur, et le point  $B$  en est l'**extrémité**.

# 2 Vecteurs égaux

## Définition :

On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **égaux** s'ils ont la **même direction**, le **même sens** et la **même longueur**.

## Définition :

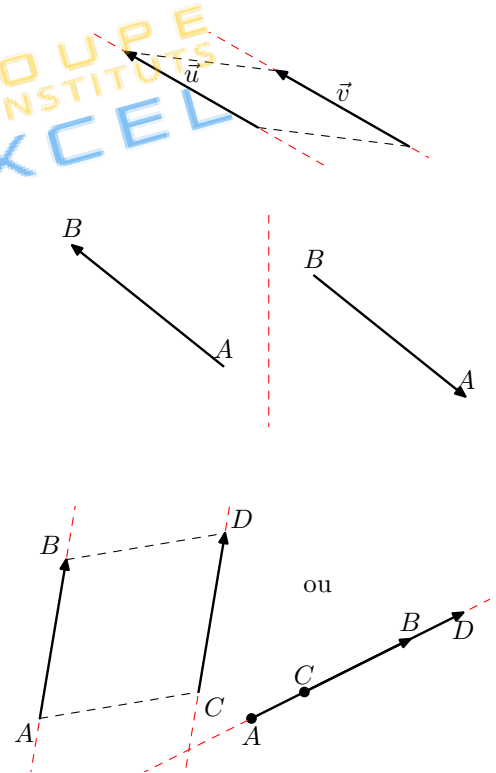
Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts du plan, alors le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  a la même direction et la même longueur que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , mais il n'a pas le même sens. On dit que  $\overrightarrow{BA}$  est le vecteur **opposé** au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , et on note  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

## Propriétés :

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan.

► Si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux, alors  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).

► Si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux (tout comme les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BD}$ ).

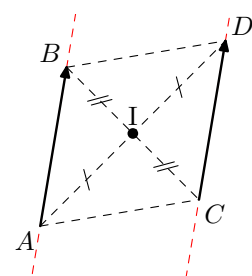


## Propriétés :

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan.

► Si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux, alors les segments  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu.

► Si les segments  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu, alors les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux (tout comme les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BD}$ ).



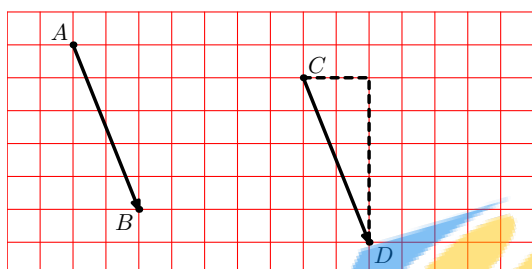
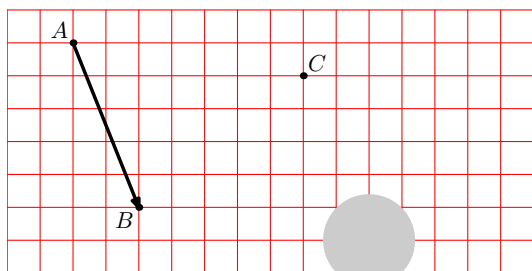
### Comment placer un point défini par une égalité vectorielle :

$A, B$  et  $C$  sont trois points du plan. On veut placer le point  $D$  tel que  $\vec{AB} = \vec{CD}$ .

#### Sur un quadrillage :

On commence par repérer, à peu près, la zone dans laquelle sera situé le point  $D$  (étape 1).

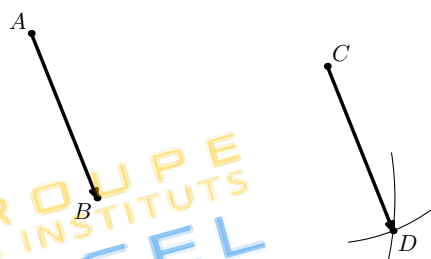
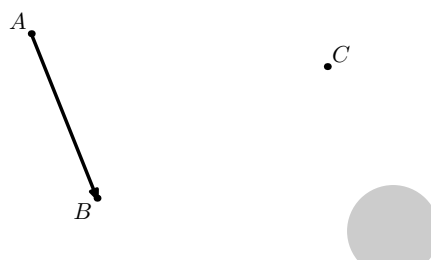
Puis on utilise le quadrillage pour construire le quatrième sommet du parallélogramme  $ABDC$  (étape 2) ; ici, on décale de deux carreaux vers la droite et de cinq carreaux vers le bas.



#### Sur du papier blanc :

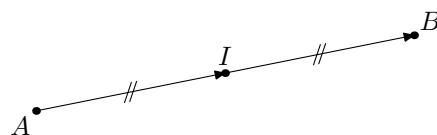
On commence par repérer, à peu près, la zone dans laquelle sera situé le point  $D$  (étape 1).

Puis on utilise le compas pour construire le quatrième sommet du parallélogramme  $ABDC$  (étape 2) ; ici, on trace un arc de cercle de centre  $C$  de rayon  $AB$ , puis un second arc de cercle de centre  $B$  de rayon  $AC$ .



#### Propriété :

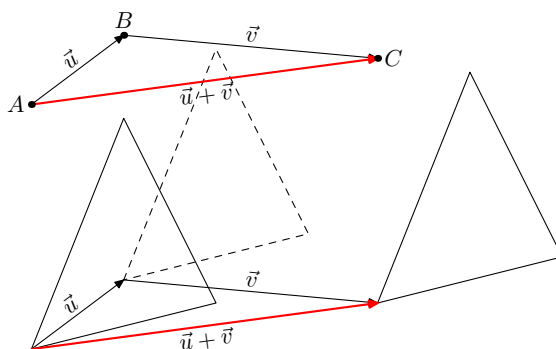
Soient  $A, I$  et  $B$  trois points distincts du plan.  
Dire que  $\vec{AI} = \vec{IB}$  revient à dire que  $I$  est le milieu de  $[AB]$



## 3 Somme de deux vecteurs

#### Propriété :

La composée de deux translations de vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est elle-même une translation, dont le vecteur est appelé **somme des vecteurs**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et est noté  $\vec{u} + \vec{v}$ .



### Relation de Chasles :

Si, avec les notations précédentes,  $\overrightarrow{AB}$  est un représentant de  $\vec{u}$ , et  $\overrightarrow{BC}$  est un représentant de  $\vec{v}$ , alors on peut écrire la relation  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , connue sous le nom de **relation de Chasles**.

**Remarque :** On peut retenir que "faire la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , puis faire la translation de vecteur  $\overrightarrow{BC}$ , cela revient à faire directement la translation de vecteur  $\overrightarrow{AC}$ ."

### Définition :

Si  $A$  et  $B$  sont deux points distincts, on a, d'après la relation de Chasles,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ , qui correspond à un déplacement nul.

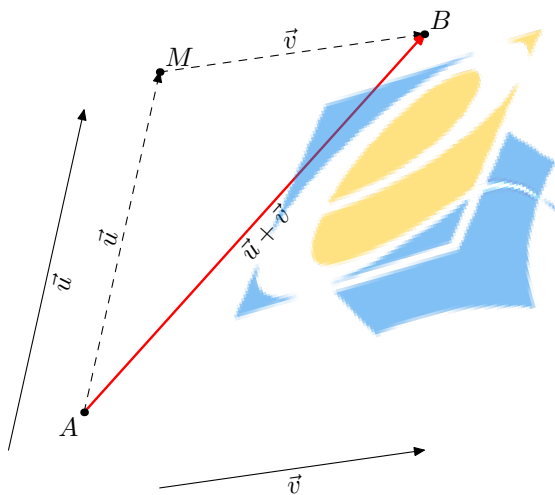
Le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  est par conséquent appelé **vecteur nul**, et on note  $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ .

### Comment construire la somme de deux vecteurs :

$A$  est un point du plan,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs. On veut placer le point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ .

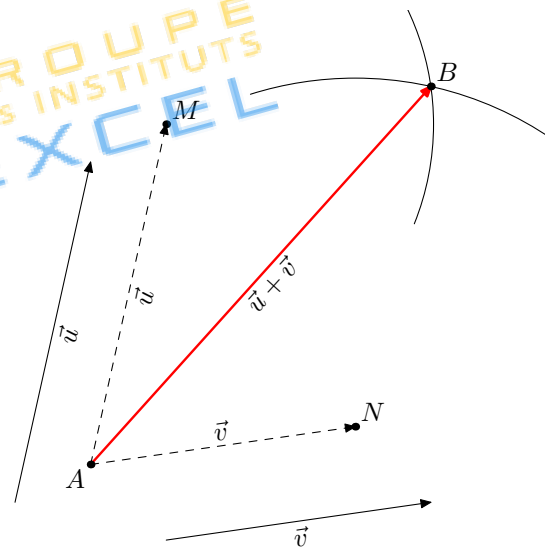
#### En mettant les vecteurs "bout à bout" :

On construit le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ , puis on construit le représentant du vecteur  $\vec{v}$  ayant ce point  $M$  pour origine ; un représentant du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .



#### En prenant des représentants de même origine :

On construit des représentants des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  d'origine  $A$ , et on appelle  $M$  et  $N$  les extrémités de ces deux représentants. On construit le point  $B$  comme quatrième sommet du parallélogramme  $AMBN$  ; un représentant du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  est le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .



## 4 Composée de deux symétries centrales

### Propriété :

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts du plan. La **composée de la symétrie de centre  $A$  et de la symétrie de centre  $B$**  est une translation de vecteur  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$  (que l'on notera  $2\overrightarrow{AB}$  par analogie avec le calcul numérique)

