Groupe des Instituts Excel

OUTILS POUR LE TRIANGLE RECTANGLE

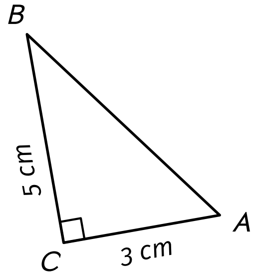
I – Théorème de Pythagore

1. Calculer une longueur

Théorème de Pythagore

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Exemple (CALCUL DE L'HYPOTÉNUSE) :



Calculer AB
(arrondir au dixième)

D : *ABC est un triangle rectangle en C*

P : *D'après le théorème de Pythagore on a :*

C : $\underline{AB}^2 = AC^2 + CB^2 \longleftarrow$ On souligne la longueur qu'on veut calculer (pas obligatoire)

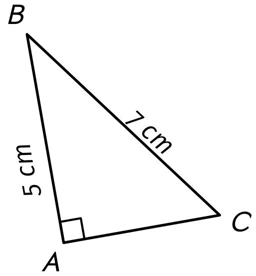
$AB^2 = 3^2 + 5^2 \longleftarrow$ On remplace les longueurs connues

$AB^2 = 34 \longleftarrow$ On calcule l'addition

$AB = \sqrt{34} \longleftarrow$ On "simplifie" le carré en utilisant $\sqrt{\ }$

$AB \approx 5,8$ cm. $\longleftarrow$ On calcule, on arrondit et on écrit l'unité

Exemple (CALCUL D'UN DES CÔTÉ FORMANT L'ANGLE DROIT) :



Calculer AC
(arrondir au dixième)

D : *ABC est un triangle rectangle en A*

P : *D'après le théorème de Pythagore on a :*

C : $BC^2 = \underline{AC}^2 + AB^2 \longleftarrow$ On souligne la longueur qu'on veut calculer (pas obligatoire)

$AC^2 = 7^2 - 5^2 \longleftarrow$ On "sort" la longueur à calculer de l'addition et le calcul devient : plus grande longueur^2 – plus petite longueur^2

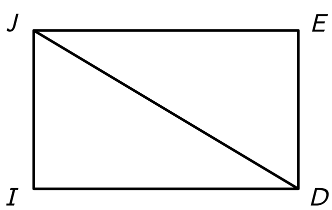
$AC^2 = 24 \longleftarrow$ On calcule la soustraction

$AC = \sqrt{24} \longleftarrow$ On "simplifie" le carré en utilisant $\sqrt{\ }$

$AC \approx 4,9$ cm. $\longleftarrow$ On calcule, on arrondit et on écrit l'unité

■ **EXERCICE :**

$JEDI$ est un rectangle tel que
$JE = 10$ cm et $ED = 6$ cm.



Calculer JD (arrondir au dixième de cm).

Solution : $JEDI$ est un rectangle donc JED est un triangle rectangle en E.

D : JED est un triangle rectangle en E

P : D'après le théorème de Pythagore on a :

C : $\underline{JD}^2 = JE^2 + IE^2$

$JD^2 = 10^2 + 6^2$

$JD^2 = 136$

$JD = \sqrt{136}$

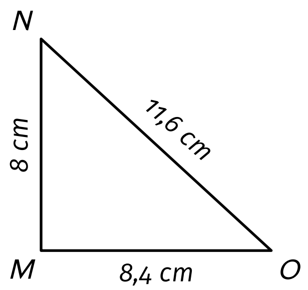
$JD \approx 11,7$ cm.

2. Montrer qu'un triangle est rectangle

Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle ABC l'égalité $AB^2 = AC^2 + BC^2$ est vraie, alors ABC est rectangle en C.

Exemple :



Question : *Montrer que le triangle MNO est rectangle.*

Réponse :

On donne le nom du plus grand côté

D : *Le plus grand côté est $[NO]$.*

On élève ce plus grand côté au carré

On élève au carré puis additionne les deux autres côtés

On obtient le même résultat, donc on l'écrit

$$\left.\begin{array}{l} NO^2 = 11,6^2 = 134,56 \\ MN^2 + MO^2 = 8^2 + 8,4^2 = 134,56 \end{array}\right\} \text{Donc } NO^2 = MN^2 + MO^2.$$

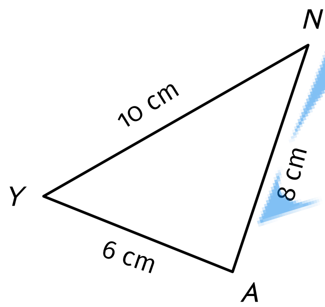
On cite la propriété

P : *D'après la réciproque du théorème de Pythagore,*

C : *Le triangle MNO est rectangle en M.*

On conclut en précisant où est l'angle droit

■ **Exercice :**



Solution : **D** : Le plus grand côté est $[YN]$

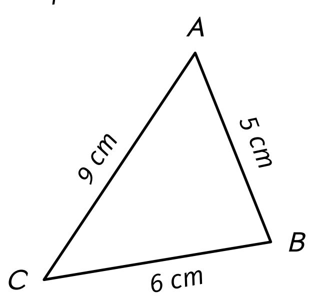
$$\left.\begin{array}{l} NY^2 = 10^2 = 100 \\ YA^2 + AN^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \end{array}\right\} \text{Donc } NY^2 = YA^2 + AN^2.$$

P : D'après la réciproque du théorème de Pythagore,

C : AYN est rectangle en A.

Question : Le triangle AYN est-il rectangle ?

Exemple :



Question :

Le triangle ABC est-il rectangle ?

Réponse :

D : *Le plus grand côté est $[AC]$.*

Il n'y a pas égalité, on l'écrit

$$\left.\begin{array}{l} AC^2 = 9^2 = 81 \\ BC^2 + AB^2 = 6^2 + 5^2 = 61 \end{array}\right\} \text{Donc } AC^2 \neq BC^2 + AB^2.$$

P : *D'après la contraposée du théorème de Pythagore*

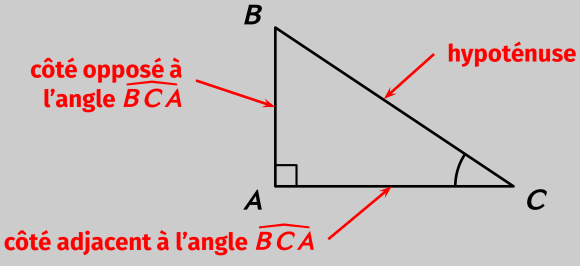
C : *Le triangle ABC n'est pas rectangle* *On conclut*

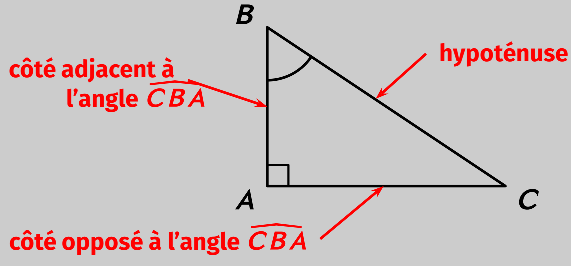
II – Trigonométrie

1. Vocabulaire et définitions

Définitions

Dans un triangle rectangle, chaque côté porte un nom spécifique en fonction de l'angle marqué :





- **l'hypoténuse est le côté « en face » de l'angle droit**
- **le côté opposé à l'angle est le côté « en face » de l'angle.**
- **le côté adjacent à l'angle est le côté « qui forme » l'angle avec l'hypoténuse.**

Remarques

- Ce vocabulaire n'existe que si le triangle est rectangle.
- L'hypoténuse est le seul côté qui ne change pas quelque soit l'angle choisi.

Définitions

- **Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu $\widehat{D}$ est le rapport :**

$$\cos \widehat{D} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{D}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

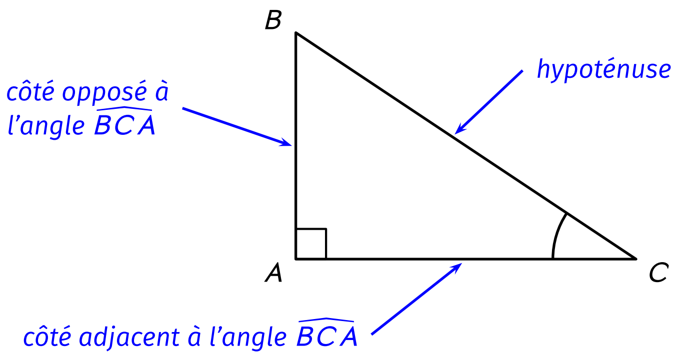
- **Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu $\widehat{D}$ est le rapport :**

$$\sin \widehat{D} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{D}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

- **Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu $\widehat{D}$ est le rapport :**

$$\tan \widehat{D} = \frac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{D}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{D}}$$

Exemple :



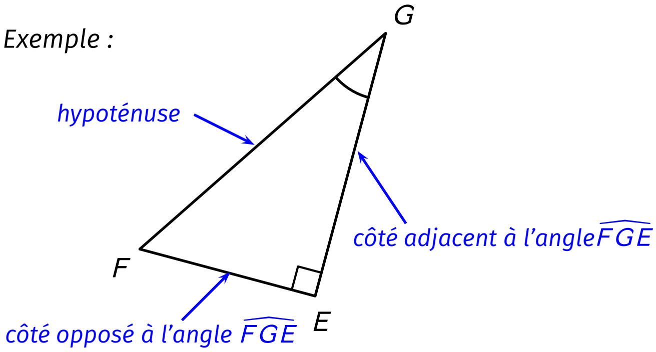
Dans le triangle ABC on a les relations :

$$\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$$

Exemple :



Dans le triangle EFG on a les relations :

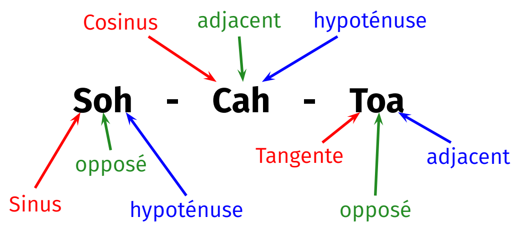
$$\cos \widehat{FGE} = \frac{EG}{FG}$$

$$\sin \widehat{FGE} = \frac{EF}{FG}$$

$$\tan \widehat{FGE} = \frac{EF}{EG}$$

Remarques

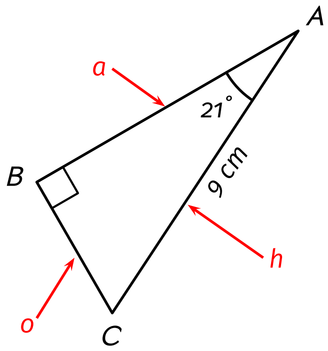
- Ces relations ne sont vraies que dans un triangle rectangle.
- Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir ses définitions le « Soh-Cah-Toa » :



2. Utiliser la trigonométrie pour calculer une longueur

Quand (toujours dans un triangle rectangle...) on connaît la mesure d'un angle et la longueur d'un côté, on utilise la trigonométrie pour calculer la longueur des autres côtés.

Exemple :



Question : *calculer AB (arrondir au dixième de cm)*

Au brouillon :

S o h - C a h - T o a

ce qu'on connaît
ce qu'on cherche

$\Longrightarrow$ *on utilise cosinus*

Réponse :

on justifie pourquoi on peut utiliser la trigonométrie

D : *Le triangle ABC est rectangle en B*

P : *Donc d'après la trigonométrie on a :*

C : $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$ *On a trouvé qu'on devait utiliser cosinus on écrit sa définition avec les longueurs*

$$\frac{\cos(21°)}{1} = \frac{AB}{9}$$

$$AB = \frac{\cos(21°) \times 9}{1}$$ *on utilise le produit en croix*

$$AB \approx 8{,}4 \text{ cm}$$ *on utilise la calculatrice :*

Tout nombre peut s'écrire comme une fraction avec 1 au dénominateur

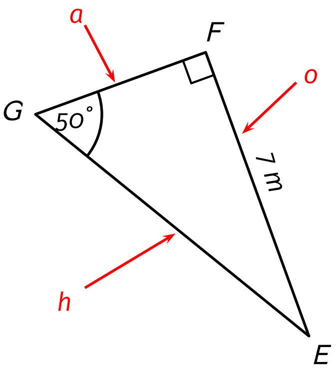
$\cos(21°) = \frac{\cos(21°)}{1}$

À la calculatrice

Avant d'utiliser sa calculatrice, il faut vérifier qu'elle est bien réglée en mode degré. Si oui, un "D" est affiché à l'écran.

Si non, il faut la configurer : , et on vérifie que le "D" est bien affiché.

Exemple :



Question : *calculer EG (arrondir au dixième)*

Au brouillon :

S o h - C a h - T o a

— *ce qu'on connaît*
— *ce qu'on cherche*

$\Longrightarrow$ *on utilise sinus*

Réponse :

D : *Le triangle EFG est rectangle en F.*

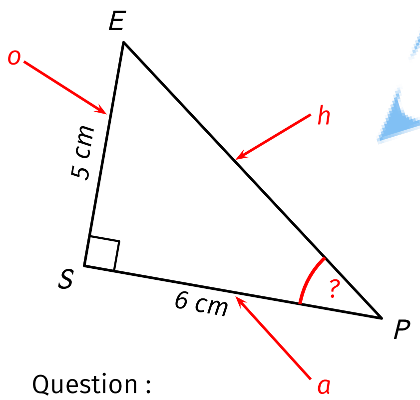
P : *Donc d'après la trigonométrie on a :*

C :
$$\sin \widehat{FGE} = \frac{EF}{EG}$$
$$\frac{\sin(50°)}{1} = \frac{7}{EG}$$
$$EG = \frac{7 \times 1}{\sin(50°)}$$
$$EG \approx 9,1m$$

3. Utiliser la trigonométrie pour calculer la mesure d'un angle

Quand on connaît la longueur de deux côtés dans un triangle rectangle, on peut calculer la mesure des angles aigus à l'aide de la trigonométrie.

Exemple :



Question :
calculer $\widehat{EPS}$ (arrondir au degré).

Au brouillon :

S o h - C a h - T o a

— *ce qu'on connaît*

$\Longrightarrow$ *on utilise tangente*

Réponse :

on justifie pourquoi on peut utiliser la trigonométrie

D : *Le triangle EPS est rectangle en S*

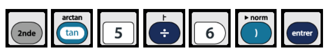
P : *Donc d'après la trigonométrie on a :*

C :
$$\tan \widehat{EPS} = \frac{ES}{SP}$$

On a trouvé qu'on devait utiliser tangente on écrit sa définition avec les longueurs

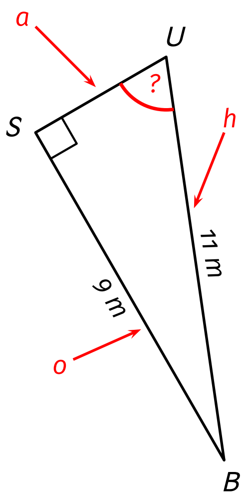
$$\tan \widehat{EPS} = \frac{5}{6}$$
$$\widehat{EPS} \approx 40°$$

On utilise la calculatrice pour faire "disparaître" tan :



Pour conclure, on va faire un petit exercice :

Exemple :



Question : *calculer* $\widehat{SUB}$ *(arrondir au degré).*

Au brouillon :

$S\,o\,h$ - $C\,a\,h$ - $T\,o\,a$

— *ce qu'on connaît*

$\Longrightarrow$ *on utilise sinus*

Réponse :

D : *Le triangle* USB *est rectangle en* S

P : *Donc d'après la trigonométrie on a :*

C : $$\sin \widehat{SUB} = \frac{SB}{UB}$$

$$\sin \widehat{SUB} = \frac{9}{11}$$

$$\widehat{SUB} \approx 55°$$