

Groupe des Instituts Excel

symétrie axiale

6.1. FIGURES SYMETRIQUES

Le mot symétrie vient du grec syn : "avec" et metron : "mesure". On reviendra sur le sens de ce mot dans la suite de la leçon.

*On parle ici de symétrie axiale, la droite (D) prenant le nom **d'axe de symétrie** pour les points M et M'.*

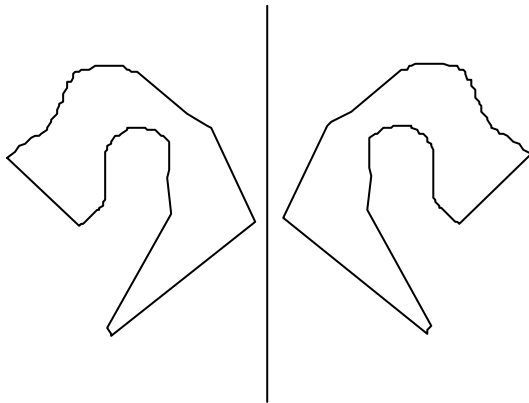
On emploie aussi les expressions équivalentes :

- Symétrie **par rapport à** la droite (D).
- Symétrie **orthogonale** d'axe (D) (car on trace des perpendiculaires).

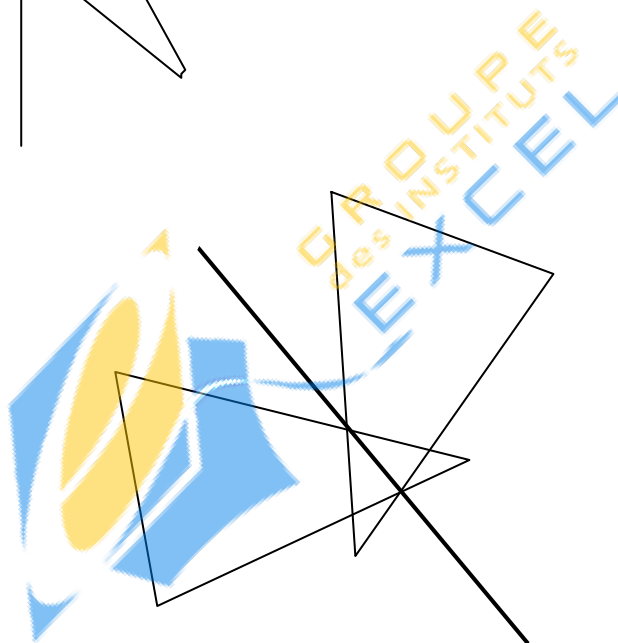
Avant de savoir construire parfaitement des symétriques et les utiliser dans des problèmes, il est bon d'en avoir une notion claire et intuitive.

La symétrie axiale, c'est ce qui se passe dans un miroir.

On peut aussi se servir d'un calque que l'on plie le long de l'axe de symétrie. Les deux figures symétriques doivent se superposer parfaitement après le pliage.



Si on plie le long de l'axe vertical, les deux dessins se superposent exactement. Ce sont donc deux figures symétriques.



6.2. POINTS SYMETRIQUES

Définition : Deux points M et M' sont symétriques par rapport à une droite (D) si :

- $[MM'] \perp (D)$
- (D) coupe $[MM']$ en son milieu.

Les points sont symétriques. La symétrie est l'action (la transformation) qui permet de "passer" d'un point à un autre. On ne la verra donc pas. Ce que l'on voit, c'est le résultat de cette symétrie.

Construire un symétrique avec l'équerre.

Une droite (D) est donnée, et un point A est placé. Il s'agit de construire le symétrique du point A par rapport à (D) ; appelons-le A' .

Avec la règle graduée (ou le compas) et l'équerre:

Programme de construction.	Construction
<ul style="list-style-type: none"> • Tracer la perpendiculaire à (D) passant par A. Elle coupe (D) en H. • Sur (AH), placer le point A' tel que $HA' = AH$. (cette longueur peut être reportée avec le compas ou la règle graduée.) 	

Construction avec le compas:

Programme de construction.	Construction
<ul style="list-style-type: none"> • Tracer un arc de cercle de centre A qui coupe (D) en M et en N. • Tracer deux arcs de même rayon, l'un de centre M, l'autre de centre N. Ils se coupent en A' • A et A' sont symétriques par rapport à (D) 	

6.3. SYMETRIQUES DES FIGURES SIMPLES

Deux segments symétriques par rapport à une droite sont superposables lorsque l'on plie la figure le long de l'axe de symétrie. Donc les segments symétriques ont la même longueur.

On énonce cette propriété ainsi :

Propriété : La symétrie conserve les distances .

Par pliage le long de l'axe de symétrie, il est clair que la symétrique d'une droite est une droite. C'est ce que l'on traduit par la propriété suivante :

Propriétés :

- La symétrie conserve l'alignement.
- Si deux droites sont perpendiculaires, leurs symétriques le sont aussi. On dit que la symétrie conserve l'orthogonalité.
- Si deux droites sont parallèles, leurs symétriques le sont aussi. On dit que la symétrie conserve le parallélisme.
- Soit \odot un cercle de centre O et de rayon R . Son symétrique par rapport à une droite (D) est le cercle \odot' de centre O' , symétrique de O par rapport à (D) , et de même rayon R .
- Deux angles symétriques ont la même mesure. On dit que la symétrie conserve les angles.



M1 : Propriétés de conservation : rédiger et utiliser.

Reprenons les propriétés de conservation énoncées page 128 ; on donne à chacune d'elles un numéro.

Propriétés :

- P1 La symétrie conserve l'alignement : si trois points sont sur une droite, leurs symétriques sont sur la même droite symétrique.
- P2 Si deux droites sont perpendiculaires, leurs symétriques le sont aussi. On dit que la symétrie conserve l'orthogonalité.
- P3 Si deux droites sont parallèles, leurs symétriques le sont aussi. On dit que la symétrie conserve le parallélisme.
- P4 Soit \square un cercle de centre O et de rayon R . Son symétrique par rapport à une droite (D) est le cercle \square' de centre O' , symétrique de O par rapport à (D) , et de même rayon R .
- P5 Deux angles symétriques ont la même mesure. On dit que la symétrie conserve les angles.

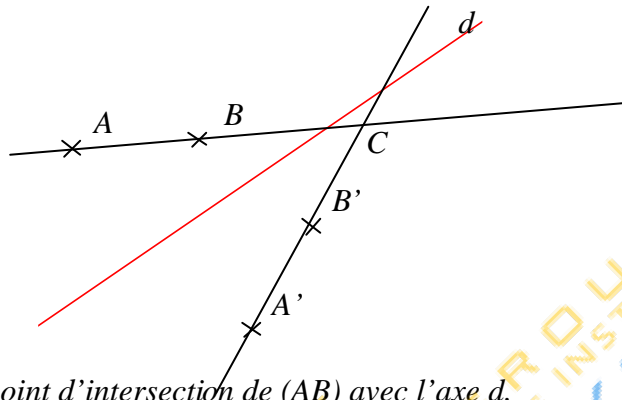
Nous allons utiliser ces propriétés dans les exercices suivants :

Exercice 1

Montrons que dans la situation apparaissant sur le dessin ci-dessous, il est impossible que les droites (AB) et $(A'B')$ soient symétriques. (et donc que cette apparence de situation n'est possible que par ce que la construction est mal faite)

On suppose que A et A' sont symétriques par rapport à d . De même que B et B' .

Les deux droites (AB) et $(A'B')$ se coupent en C qui est en dehors de l'axe de symétrie.



Soit E le point d'intersection de (AB) avec l'axe d .

E est un point de la droite (AB) , son symétrique doit donc être un point de la droite $(A'B')$ qui est la symétrique de (AB) ; cela en application de la propriété P1 : La symétrie conserve l'alignement : si trois points sont sur une droite, leurs symétriques sont sur la même droite symétrique.

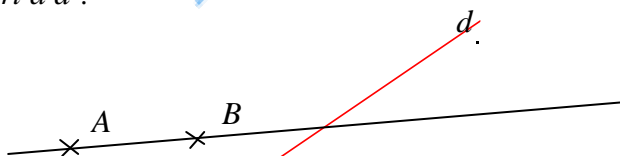
Donc le symétrique de E doit se trouver à l'intersection de d et de $(A'B')$.

D'après le dessin, le point E devrait donc avoir deux positions, ce qui est impossible.

Conclusion : Si deux droites symétriques se coupent, ce ne peut être que sur l'axe de symétrie.

Application :

Que suffit-il de faire pour obtenir la droite symétrique de (AB) si A et A' sont symétriques par rapport à d ?



6 . 4 . M E D I A T R I C E D ' U N S E G M E N T

Définition :

Si A et B sont symétriques par rapport à une droite (D) , on dit que (D) est l'axe de symétrie du segment $[AB]$.

L'axe de symétrie d'un segment s'appelle la médiatrice de ce segment.

En conséquence de la définition que nous avons donnée de deux points symétriques, on peut énoncer cette première propriété de la médiatrice d'un segment :

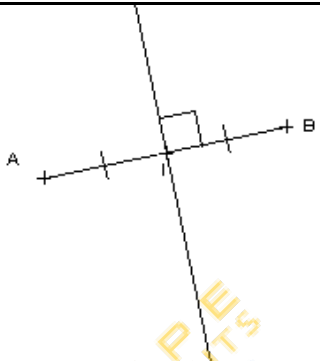
Propriété n°1 :

La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire à ce segment en son milieu.

Ce qui peut se traduire par deux phrases réciproques :

1. Si une droite (D) est la médiatrice d'un segment, alors elle est perpendiculaire à ce segment et le coupe en son milieu.
2. Si une droite (D) coupe un segment perpendiculairement et en son milieu, alors c'est la médiatrice de ce segment.

Conséquence : Construction de la médiatrice d'un segment à l'équerre

Programme de construction	Construction
<p>Le segment $[AB]$ est donné. Il s'agit de construire sa médiatrice.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Placer le milieu I de $[AB]$. • Tracer, en I, la perpendiculaire à $[AB]$. 	

Traduction d'une partie de la propriété.

Hypothèses	Conclusion
$(D) \perp [AB]$ I est le milieu de $[AB]$ $I \in (D)$	(D) est la médiatrice de $[AB]$

Il s'agit ici de la traduction en écritures mathématiques de la deuxième partie de la propriété n°1 de la médiatrice.

6.5. BISSECTRICE D'UN ANGLE

Définition : La bissectrice d'un secteur angulaire est une demi-droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même angle.

Par abus de langage, on dit que la bissectrice d'un angle partage cet angle en deux angles égaux.

Programmes de construction

- **Avec le rapporteur**

C'est la construction la plus évidente, celle qui utilise directement la définition.

On a un angle \widehat{xAy} . On souhaite tracer sa bissectrice

- Mesurer l'angle \widehat{xAy}
- Placer un point M tel que $\widehat{xAM} = 1/2 \widehat{xAy}$
- Tracer $[AM)$; c'est la bissectrice.

- **Avec le compas**

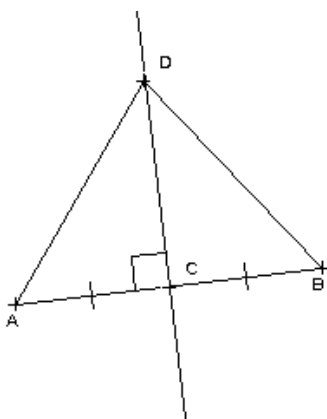
C'est une construction qui utilise une propriété du losange (qui sera vue plus tard)

On a un angle \widehat{xAy} . On souhaite tracer sa bissectrice

- Tracer un arc de centre A qui coupe $[Ax)$ en M et $[Ay)$ en N .
- Tracer deux arcs, de même rayon, l'un de centre M , l'autre de centre N . Ils se coupent en I .
- Tracer $[AI)$; c'est la bissectrice.



6.6. ÉQUIDISTANCE



Soit D un point de la médiatrice (DC) du segment $[AB]$.
 A et B sont symétriques par rapport à (CD) .
 D est son propre symétrique, donc $[AD]$ et $[BD]$ sont deux segments symétriques par rapport à (CD) . Par pliage le long de (CD) ils vont se superposer, ils ont donc la même longueur.
 De cette constatation, on peut en déduire une nouvelle propriété de la médiatrice d'un segment.

Propriété n°2

Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est situé à la même distance des deux extrémités de ce segment.

Traduction

<u>Hypothèses</u>	<u>Conclusion</u>
<ul style="list-style-type: none"> • (D) est la médiatrice de $[AB]$ • $M \hat{=} (D)$ 	$MA = MB$

Étudions le problème réciproque :

Soit M un point situé à égale distance de A et de B . Plaçons I le milieu de $[AB]$. Traçons (MI) . Les deux triangles AMI et BMI ont trois côtés de même longueur. Ils sont donc superposables par pliage le long de (MI) . Donc (MI) est l'axe de symétrie du segment $[AB]$.

D'où l'énoncé de la propriété n°3 qui est la réciproque de la propriété n°2:

Propriété n°3 :

Si un point est **équidistant**¹ des extrémités d'un segment, alors c'est un point de la médiatrice de ce segment.

Traduction

<u>Hypothèses</u>	<u>Conclusion</u>
<ul style="list-style-type: none"> • $MA = MB$ • (D) médiatrice de $[AB]$ 	$M \hat{=} (D)$

¹équidistant : de equi : "égal", signifie : situés à égale distance.




Fiche de méthode

M2 : Le partage du plan

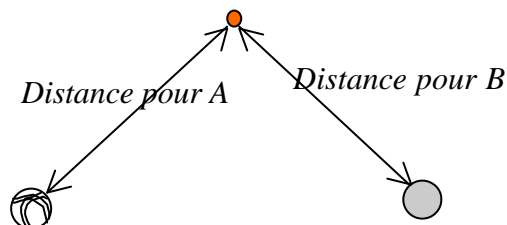
La pétanque :

Deux équipes jouent à la pétanque

Les boules ont des motifs différents pour qu'on les reconnaisse.

Équipe A  Équipe B 
Le cochonnet (le petit, le but, 
selon les régions)

Pour déterminer l'équipe qui marque le point lorsque deux boules sont en jeu, il est d'usage d'utiliser un mètre pour mesurer la distance séparant chacune des deux boules du but.

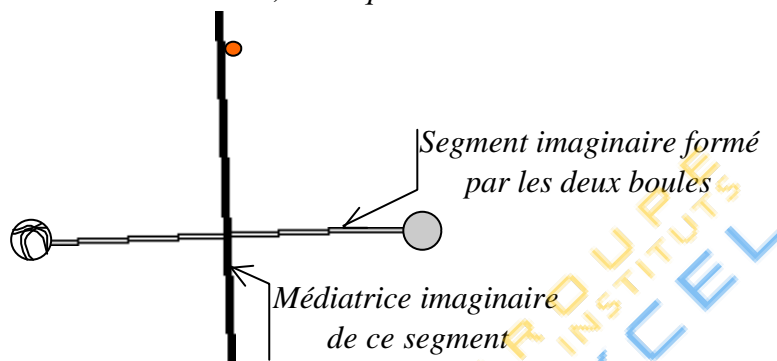


C'est la boule la plus proche du but qui marque le point.

Néanmoins, il est fréquent de voir le bouliste se placer derrière les boules et d'un coup d'œil habile déterminer quelle est la boule qui marque le point.

Que fait-il dans sa tête ?

Il se place (son œil) de manière à pouvoir visualiser mentalement la médiatrice formée par les deux boules en concurrence, ainsi que le montre le schéma suivant :



Le but se trouvant du côté de la médiatrice où se trouve aussi la boule de l'équipe B, c'est cette boule qui en est la plus proche, et qui marque le point.

Quand plusieurs boules sont en jeu, il suffit de se déplacer de manière à répéter l'opération mentale jusqu'à ce que chaque cas soit réglé.

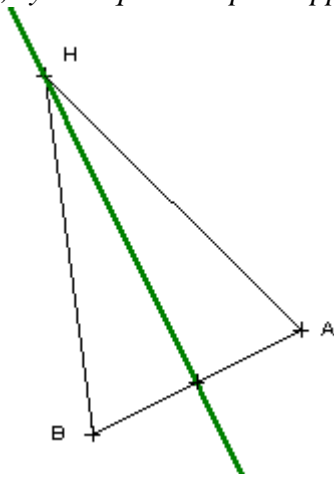
Exercice

Déterminer les résultats pour chacune de ces situations :

6.7. SYMETRIE ET TRIANGLES

Triangle isocèle :

Soit une droite (D) , un point H sur (D) , et un point A qui n'est pas sur (D) . Plaçons le point B , symétrique de A par rapport à (D) .



La droite (D) est ainsi l'axe de symétrie de ce triangle

Définition : Un triangle qui a un axe de symétrie s'appelle un triangle **isocèle**.

Dans ce triangle isocèle, H est appelé le **sommet principal**. $[AB]$ s'appelle la **base**. (c'est le côté qui n'est pas égal aux deux autres.)

Par symétrie, il y a un certain nombre de propriétés pour un triangle isocèle. En utilisant les notations de cette figure

- Il a deux côtés égaux $HA = HB$
- Il a deux angles "à la base" égaux : $\widehat{HAB} = \widehat{HBA}$.
- (D) est à la fois bissectrice de \widehat{BHA} et médiatrice de $[AB]$. Elle coupe donc $[AB]$ en son milieu.

Si A est le sommet principal du triangle isocèle ABC , on dit parfois que ABC est isocèle en A ; ou bien que ABC est isocèle de base $[BC]$.

On peut donner deux autres définitions d'un triangle isocèle, selon que l'on s'intéresse aux côtés ou aux angles.

Définition 2 : Si un triangle a deux côtés de même longueur, alors il est isocèle.

Définition 3 : Si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.

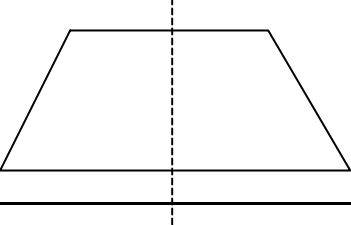
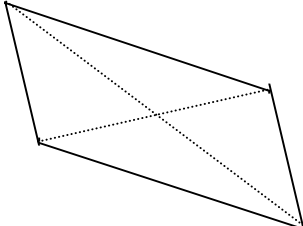
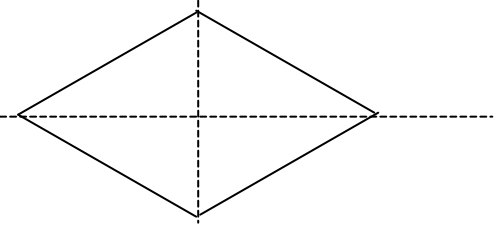
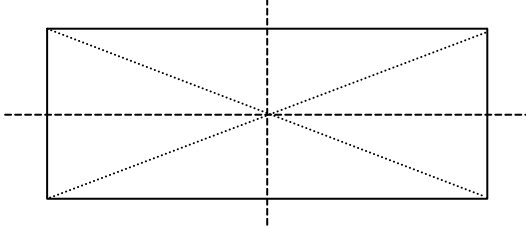
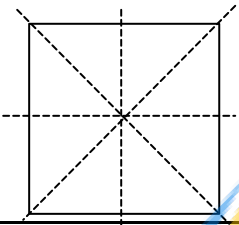
Parmi les triangles isocèles, il y en a qui ont **en plus** la particularité d'avoir la base de même longueur que les deux autres côtés. Ils ont alors trois axes de symétrie.

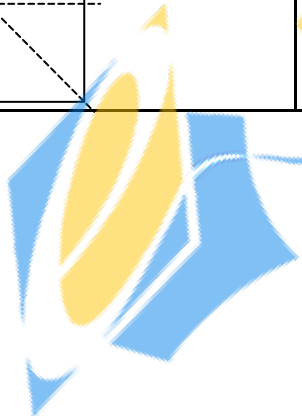
Définition : Un triangle qui a trois axes de symétrie s'appelle un triangle équilatéral.



6.8. SYMETRIE ET QUADRILATERES

On peut classer les quadrilatères en fonction de leur nombre d'axes de symétrie.

	<p><u>Trapèze isocèle</u> Il a un axe de symétrie qui est la médiatrice des deux côtés parallèles.</p>
	<p><u>Le parallélogramme</u> Il n'a pas d'axe de symétrie. C'est une erreur assez courante de penser aux diagonales (ici en pointillé) mais si on imagine le pliage le long de l'une de ces diagonales, les sommets ne se superposent pas.</p>
	<p><u>Le losange</u> Il a deux axes de symétrie qui sont ses deux diagonales.</p>
	<p><u>Le rectangle</u> Il a deux axes de symétrie qui sont les médiatrices des côtés opposés. Comme pour le parallélogramme, les diagonales ne sont pas axe de symétrie.</p>
	<p><u>Le carré</u> Il regroupe les axes de symétrie du losange et du rectangle. Il en a donc quatre qui sont les deux diagonales et les deux médiatrices des côtés opposés.</p>



6.9. SYMETRIE ET QUADRILLAGE

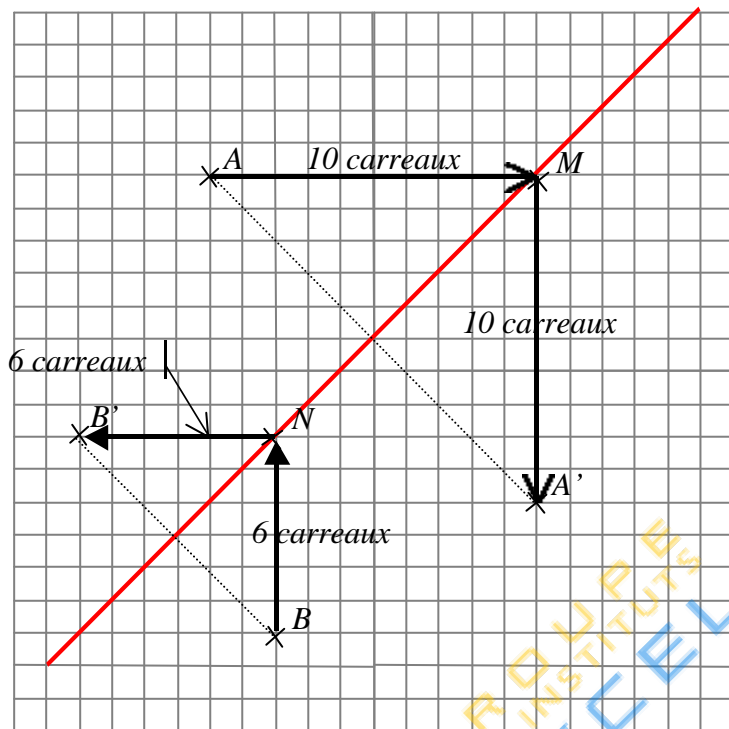
On n'utilisera ici que les cas particuliers où l'axe de symétrie se trouve être dans la diagonale des carreaux du quadrillage.

Les autres situations seraient possibles mais apporteraient plus de complication qu'une bonne utilisation du compas ou de la règle.

Dans un quadrillage, on trace l'axe de symétrie, qui est donc dans la diagonale des carreaux. On place un point A sur un des nœuds du quadrillage.

Pour placer le symétrique A' de A par rapport à l'axe, on procède ainsi :

- On compte le nombre de carreaux qui nous mènent du point A jusqu'à l'axe en se déplaçant **horizontalement** (on verra sur l'exemple suivant que l'on peut aussi se déplacer verticalement). On appelle M le point d'intersection de l'axe et de cette horizontale passant par A.
- Du point M, on se déplace **verticalement** du même nombre de carreaux, et on place le point A'.



On place un point B sur un des nœuds du quadrillage.

Pour placer le symétrique B' de B par rapport à l'axe, on procède ainsi :

- On compte le nombre de carreaux qui nous mènent du point B jusqu'à l'axe en se déplaçant **verticalement**. On appelle N le point d'intersection de l'axe et de cette verticale passant par B.
- Du point N, on se déplace **horizontalement** du même nombre de carreaux, et on place le point B'.