(1)

- تصحيح امتحان وطني 2021 رياضيات -
- الدورة الاستدراكية . -

- $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1+U_n}{3-U_n} \\ U_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

1) لنبين أن : $0<U_n<1$. (برهان بالترجع)

ل $n=0$

$0<U_0=\frac{1}{3}<1$ صحيح

لنفترض أن : $0<U_n<1$ من أجل n ونبين أن : $0<U_{n+1}<1$.

$U_{n+1} = \frac{1+U_n}{3-U_n} > 0 \quad \left(\begin{matrix} 1+U_n>0 : & 0<U_n \\ 3-U_n>0 : & U_n<1 \end{matrix} \ HR \right) \Rightarrow 0<U_{n+1}$ ①

② لنبين أن : $U_{n+1}<1$:

$U_{n+1}-1 = \frac{1+U_n}{3-U_n}-1 = \frac{1+U_n-(3-U_n)}{3-U_n} = \frac{-2+2U_n}{3-U_n}$

$\Rightarrow U_{n+1}-1 = \frac{2(U_n-1)}{3-U_n} < 0$ ② $\left(\begin{matrix} U_n<1 & (U_n-1<0) \\ et\ 3-U_n>0 & (U_n<1) \end{matrix} \right)$

① et ② $\Rightarrow 0<U_{n+1}<1 \Rightarrow$ ومنه :

$\forall n\in\mathbb{N} : 0<U_n<1$

2) أ) لنبين أن : $U_{n+1}-U_n = \frac{(U_n-1)^2}{3-U_n}$

$U_{n+1}-U_n = \frac{1+U_n}{3-U_n}-U_n = \frac{1+U_n-U_n(3-U_n)}{3-U_n} = \frac{1-2U_n+U_n^2}{3-U_n} = \frac{(U_n-1)^2}{3-U_n}$

ب) لنبين أن (U_n) متزايدة : $U_{n+1}-U_n = \frac{(U_n-1)^2}{3-U_n} \geq 0 \ (0<U_n<1)$ $(3-U_n>0)$

ومنه U_n تزايدية ومكبورة ب 1 ومنه U_n متقاربة

3) أ) $V_n = \frac{1}{1-U_n}$

$V_{n+1} = \frac{1}{1-U_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2U_n-2}{U_n-3}} = \frac{U_n-3}{2U_n-2} = \frac{U_n-3}{2(U_n-1)}$

$\cancel{V_{n+1}-V_n = \frac{U_n-3}{2(U_n-1)} + \frac{1}{1-U_n} = \frac{U_n-3}{2(U_n-1)} = \frac{U_n-1}{2(U_n-1)} = \frac{1}{2}}$

donc :

$V_{n+1}-V_n = \frac{U_n-3}{2(U_n-1)} - \frac{1}{1-U_n} = \frac{U_n-3}{2(U_n-1)} + \frac{1}{U_n-1} = \frac{U_n-1}{2(U_n-1)} = \frac{1}{2}$

ومنه U_n متتالية حسابية أساسها : $\frac{1}{2}$ ، $V_0 = \frac{1}{1-U_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$V_0 = \frac{3}{2}$ ؛

ب) لنحدد V_n بدلالة n : $V_n = V_0 + (n-0)\cdot\frac{1}{2}$

$V_n = \frac{3}{2}+\frac{n}{2} = \frac{n+3}{2}$ ؛

لنحدد U_n بدلالة n :

$V_n = \frac{1}{1-U_n} \Rightarrow \frac{1}{V_n} = 1-U_n \Rightarrow U_n = 1-\frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{V_n-1}{V_n} = \frac{n+1}{2(n+3)} = \frac{n+1}{n+3}$.

(1)

- تصحيح امتحان وطني 2021 رياضيات -
- الدورة الاستدراكية . -

$$\begin{cases} U_{n+1}=\frac{1+U_n}{3-U_n} \\ U_0=\frac{1}{3} \end{cases}$$ -

1) نبين أن : $0<U_n<1$ (برهان بالترجع)

لـ $n=0$

$0<U_0=\frac{1}{3}<1$ صحيح

لنفترض أن : $0<U_n<1$ من أجل n ونبين أن : $0<U_{n+1}<1$.

$U_{n+1}=\frac{1+U_n}{3-U_n}>0$ $\left(\begin{matrix}1+U_n>0 : 0<U_n \\ 3-U_n>0 : U_n<1 \end{matrix}\ HR\right) \Rightarrow 0<U_{n+1}$ ①

② نبين أن : $U_{n+1}<1$:

$U_{n+1}-1=\frac{1+U_n}{3-U_n}-1=\frac{1+U_n-(3-U_n)}{3-U_n}=\frac{-2+2U_n}{3-U_n}$

$\Rightarrow U_{n+1}-1=\frac{2(U_n-1)}{3-U_n}<0$ ② $\left(\begin{matrix}U_n<1 \\ et\ 3-U_n>0\end{matrix}\right.$ $\begin{matrix}(U_n-1<0) \\ (U_n<1)\end{matrix}$

① et ② $\Rightarrow 0<U_{n+1}<1 \Rightarrow$ ومنه :

$\forall n\in\mathbb{N}: 0<U_n<1$

2) أ) نبين أن : $U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-1)^2}{3-U_n}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{1+U_n}{3-U_n}-U_n=\frac{1+U_n-U_n(3-U_n)}{3-U_n}=\frac{1-2U_n+U_n^2}{3-U_n}=\frac{(U_n-1)^2}{3-U_n}$

ب) نبين أن (U_n) متزايدة : $U_{n+1}-U_n=\frac{(U_n-1)^2}{3-U_n}\geq 0$ $(0<U_n<1)$ $(3-U_n>0)$

ومنه U_n متزايدة ومحدودة بـ 1 ومنه U_n متقاربة

3) أ) $V_n=\frac{1}{1-U_n}$

$V_{n+1}=\frac{1}{1-U_{n+1}}=\frac{1}{\frac{2U_n-2}{U_n-3}}=\frac{U_n-3}{2U_n-2}=\frac{U_n-3}{2(U_n-1)}$

$\cancel{V_{n+1}-V_n=\frac{U_n-3}{2(U_n-1)}+\frac{1}{1-U_n}=\frac{\dots}{2(U_n-1)}=\frac{\dots}{2(U_n-1)}=\frac{1}{2}}$

donc :

$V_{n+1}-V_n=\frac{U_n-3}{2(U_n-1)}-\frac{1}{1-U_n}=\frac{U_n-3}{2(U_n-1)}+\frac{1}{U_n-1}=\frac{U_n-1}{2(U_n-1)}=\frac{1}{2}$

ومنه المتتالية U_n حسابية أساسها : $\frac{1}{2}$ ، $V_0=\frac{1}{1-U_0}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$V_0=\frac{3}{2}$ ؛

ب) نحدد V_n بدلالة n :

$V_n=V_0+(n-0)\cdot\frac{1}{2}$

$V_n=\frac{3}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n+3}{2}$ ؛

نحدد U_n بدلالة n :

$V_n=\frac{1}{1-U_n}\Rightarrow \frac{1}{V_n}=1-U_n \Rightarrow U_n=1-\frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n=\frac{V_n-1}{V_n}=\frac{n+1}{2(n+3)}=\frac{n+1}{n+3}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1+1/n)}{n(1+3/n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+1/n}{1+3/n} = 1$ (c ②

ب)

$u_n \geq \frac{1011}{1012} \Rightarrow \frac{n+1}{n+3} \geq \frac{1011}{1012} \Leftrightarrow (n+1)(1012) \geq 1011(n+3)$

$\Leftrightarrow 1012n + 1012 \geq 1011n + 3033$

$\Leftrightarrow 1012n - 1011n \geq 2021$

$\Leftrightarrow n \geq 2021$

اصغر قيمة هي 2021.

التمرين II :

1)

$z^2 - 6z + 13 = 0 \qquad \Delta = 36 - 52$

$= -16 < 0$

$z_1 = \frac{6 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i \qquad z_2 = 3 + 2i$

$S = \{3 - 2i ; 3 + 2i\}$

2) أ)

$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-1-2i-(3-2i)}{3+2i-(3-2i)} = \frac{-4}{4i} = -\frac{1}{i} = i = [1, \frac{\pi}{2}]$

ب) طبيعة المثلث: لدينا

$\frac{c-b}{a-b} = [1, \frac{\pi}{2}]$

ومنه المثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في رأسه B.

3) أ)

$z' - z_B = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$

$\Rightarrow z' = i(z - z_B) + z_B = iz - iz_B + z_B = iz - i(3-2i) + 3 - 2i$

$\Rightarrow \boxed{z' = iz - 5i + 1}$

$= z' = ia - 5i + 1 = i(3+2i) - 5i + 1 = -2i - 1 = c$ (ب

ومنه صورة A هي C.

4) أ)

$\frac{c-a}{d-a} = \frac{-1-2i-(3+2i)}{-3-4i-(3+2i)} = \frac{-4-4i}{-6-6i} = \frac{-4(1+i)}{-6(1+i)} = \frac{4}{6} \in \mathbb{R}$

ومنه النقط مستقيمية

ب)

d : صورة c

$z' - z_{\Omega} = k(z - z_{\omega})$

$d - c = k(a - c) \Rightarrow k = \frac{d-c}{a-c} = \frac{-2-2i}{4(1+i)} = \frac{-2(1+i)}{4(1+i)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ ، ومنه $k = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{BC} = \vec{ED}$

$\Rightarrow c - b = d - m \Rightarrow m = -(c-b) + d = d - (c - b) = 1 - 4i$

5) أ)

$\frac{d-a}{m-b} = \frac{-6-6i}{-2-2i} = \frac{-6(1+i)}{-2(1+i)} = 3 \in \mathbb{R}$.

ب)

$\frac{d-a}{m-b} = 3 \Rightarrow d - a = 3(m - b)$

$\Rightarrow \vec{AD} = 3\vec{BE}$

$\frac{b-a}{m-d} = \frac{-4i}{4} = -i$

$\Rightarrow AB = ED$

ومنه ثلاث نقط ... ABCD ...

③ التصحيح الكامل

$h(x)=x+\ln x$

1) لنبين أن: h تزايدية

$h'(x)=(x)'+(\ln x)'=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}>0$ $(x>0)$

ومنه h تزايدية تماما على $]0,+\infty[$

2) لأن h تزايدية

$h(]0,+\infty[)=]\lim_{0^+}h(x),\lim_{+\infty}h(x)[$
$=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to0^+}x+\ln x=-\infty$ $(\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$. $(\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty)$

3) أ) بما أن h تزايدية تماما على $]0,+\infty[$ ومستمرة و $0\in h(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$

ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا $\alpha\in]0,+\infty[$

ب) $0<\alpha<1$

$\lim_{x\to0^+}h(x)=-\infty$ و $f(1)=1$

$\Rightarrow 0\in h(]0,1[)\Rightarrow\alpha\in]0,1[$.

4) أ- لنتحقق أن:

$h(\frac{1}{\alpha})=\alpha+\frac{1}{\alpha}$

$h(\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}+\ln(\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}-\ln\alpha=$

$(h(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha+\ln\alpha=0\Leftrightarrow-\ln\alpha=\alpha)$

ومنه $h(\frac{1}{\alpha})=\frac{1}{\alpha}+\alpha$.

ب-

$h(\frac{1}{\alpha})-2=\alpha+\frac{1}{\alpha}-2=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}>0$

ومنه $h(\frac{1}{\alpha})>2$.

مسألة:

$f(x)=2-xe^{-x+1}$

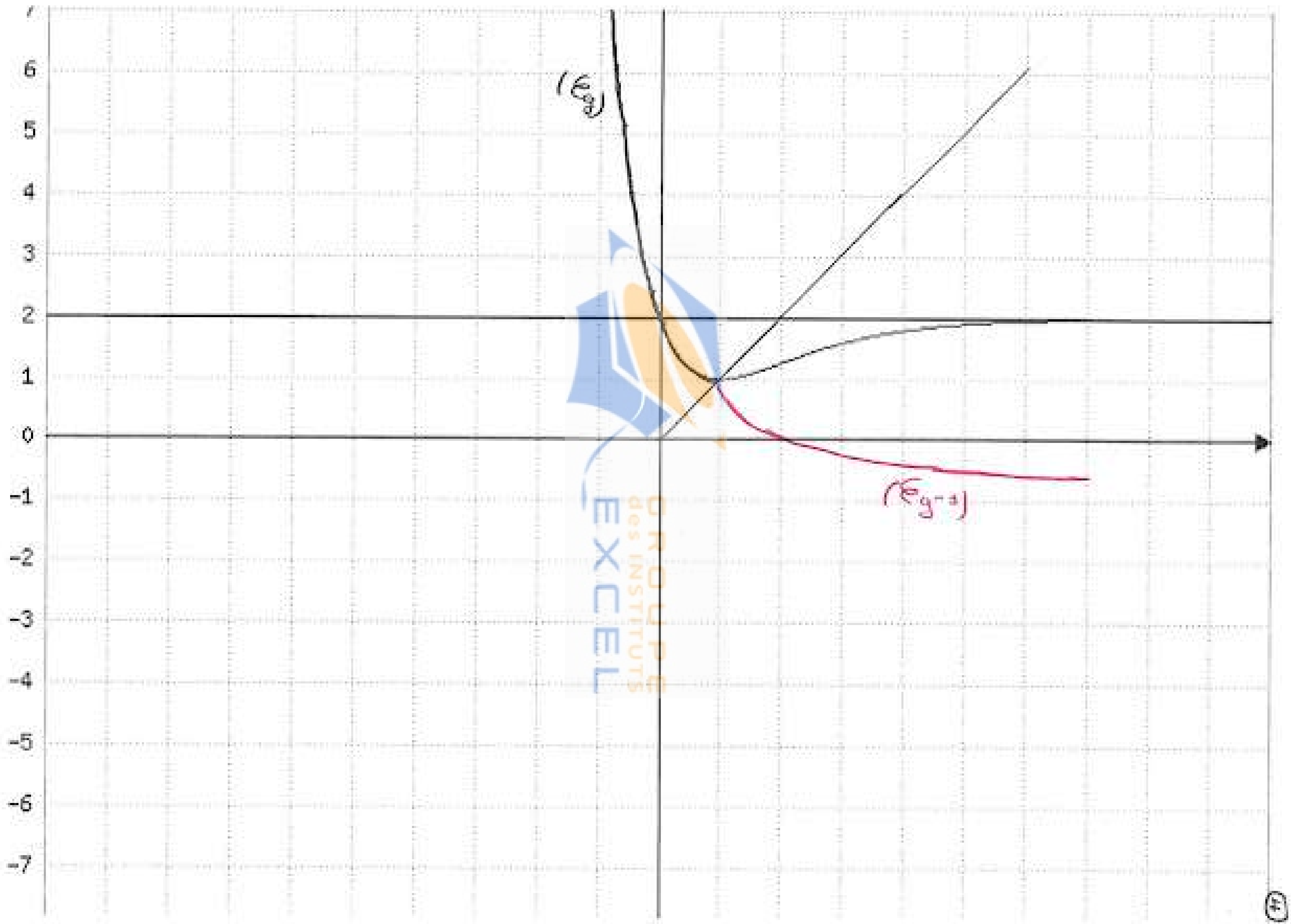
1) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2-xe^{-x+1}=\lim_{x\to+\infty}2-xe^{-x}\times e=2$ $(ue^{u}\xrightarrow[u\to-\infty]{}0)$

التأويل الهندسي: $y=2$ مقارب ل C_f بجوار $+\infty$.

2) أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}2-xe^{-x+1}=+\infty$ $(\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=e^{+\infty}=+\infty)$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}-e^{-x+1}=-\infty$

C_f يقبل فرع شلجمي باتجاه محور التراتيب



7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
$(\mathcal{C}_g)$
$(\mathcal{C}_{g^{-1}})$

$$\int_0^2 x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} \times 1\,dx$$

$u'(x) = e^{-x} \longrightarrow u(x) = -e^{-x}$

$v(x) = x \longrightarrow v'(x) = 1$

$$= -\left[x e^{-x}\right]_0^2 + \int_0^2 e^{-x}\,dx$$

$$= -\left(2e^{-2} - 0\right) + \left[-e^{-x}\right]_0^2$$

$$= -2e^{-2} - \left[e^{-x}\right]_0^2$$

$$= -2e^{-2} - \left(e^{-2} - 1\right)$$

$$= -3e^{-2} + 1$$

$$= \frac{-3}{e^2} + 1$$

ب)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 2 - x e^{-x+1}\,dx$$

$$= \int_0^2 \left(2 - (x e^{-x})\, e\right) dx$$

$$= \int_0^2 2\,dx - e\int_0^2 x e^{-x}\,dx = 2\left[x\right]_0^2 - e\left(\frac{-3}{e^2} + 1\right)$$

$$= 2(2-0) + \frac{3}{e} - e$$

$$= 4 - e + \frac{3}{e} = 4 - e + 3e^{-1}$$

(3) أ) $g = f_{]-\infty,1]}$ دالة رتيبة قطعا في $]-\infty,1]$ ومتصلة عليه

ومنه g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على: لأن مجموع و ضرب دوال متصلة

$g(]-\infty,1]) = [1,+\infty[$

ب) للإنشاء انظر صفحة (4)

ج) $\lim_{x\to+\infty} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 0$

ومنه: $(C_{g^{-1}})$ تقبل فرع شلجمي في اتجاه (Ox)