Correction proposer :
examen national 2.SM - 2019

(1

Ex1 : (structure algébrique).

on definie sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ par : $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy)*(a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$$

$\boxed{1}$

$\boxed{1-a}$: Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
$z' = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

on a :

$$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y)$$
$$= ax + i(ya^2 + bx^2)$$
$$= z'*z$$

$\boxed{\text{c/c : la loi } * \text{ est commutative sur } \mathbb{C}}$

$\boxed{1-b}$ Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq : $z = x+iy$
$z' = a+ib$
$z'' = m+in$

tq : $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z*z'$ et $z'*z''$ on verifier que :

$$(z*z')*z'' = z*(z'*z'')$$

c/c : $\boxed{\text{la loi } * \text{ est associative sur } \mathbb{C}}$

1-c :

comme $*$ est commutative.
il suffit de résoudre equation $z*e = z$ d'inconnue $\boxed{e = a+ib}$ et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit : $z * \mathbb{C}^*$ tq : $z = x+iy$

$z*e = z \iff xa + i(x^2b + a^2y) = x + iy$
$\iff xa = x,\ x^2b + a^2y = y$
$\iff a = 1 ;\ x^2b = 0$
$\iff a = 1,\ b = 0$
$\iff \boxed{e = 1}$

pour $z = 0$ on a : $0 \times 1 = 0$

d'où : $*$ admet $\boxed{e = 1}$ comme l'élément neutre.

$\boxed{d}$: Soit : $z = x+iy$ avec : $(x, y) \in \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}$
$z' = a+ib$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on a : $z*z' = e = 1$

$\iff xa = 1$ et $x^2b + a^2y = 0$

$\iff a = 1/x$ et $b = \frac{-y}{x^4}$

comme : $*$ commutative

alors : le symétrie de z est z' avec : $z' = 1/x - i\, y/x^4$

$\boxed{2}$ $E = \{x+iy \,/\, x>0,\ y \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{a}$

Soit $z, z' \in E$, $z = x+iy$, $x>0$
$z' = a+ib$, $a>0$

on a :

$$z*z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$$

car : $x, a > 0 \Rightarrow x.a > 0$

$\boxed{\text{c/c : E est stable par } *}$

$\boxed{2-b}$

on a : • $*$ est associative
• toute élément de E est symétrisable de sy $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^4}$ (car : $x>0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$).
• $*$ est commutative

$\boxed{\text{alors : } (E, *) \text{ est un groupe abélien}}$

$\boxed{3}$: $G = \{1 + iy \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.

on a : $G \subset E$ car : $1 > 0$

Soit : $z, z' \in G$ tq : $z = 1+iy$
$z' = 1+ib$

on a $z * \mathrm{Sym}(z') = z*(1-ib)$
$= 1 + i(-b+y) \in G$

d'où $\boxed{\text{G est un sous grp de } (E, *)}$

$\boxed{3}$. $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}, x>0, y\in\mathbb{R}\right\}$

$\boxed{a}$ Soit : $M(x,y), M(a,b)\in F$ on a :

$$M(x,y)\times M(a,b)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}xa & xb+ya\\0&xa\end{pmatrix}\in F$$

car : $xa>0$ et $xb+ya\in\mathbb{R}$

de même, $M(a,b)\times M(x,y)=\begin{pmatrix}xa & xb+ya\\0&xa\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{d'où : } F \text{ est stable par } \times \text{ dans } M_2(\mathbb{R})}$

$\boxed{b}$: $\varphi : E \longrightarrow F$

$x+iy \longrightarrow M(x^2,y)$

Soient : $z=x+iy$, $z'=a+ib\in E$

on a :

$$\varphi(z*z')=M((xa)^2, x^2b+a^2y)$$

et on a :

$$\varphi(z)\times\varphi(z')=M(x^2,y)\times M(a^2,b) \in F$$

$$=\begin{pmatrix}(xa)^2 & x^2b+a^2y\\0&(xa)^2\end{pmatrix} \text{ (question a)}$$

$$=M((xa)^2, x^2b+a^2y)$$

d'où :

$\boxed{\varphi(z*z')=\varphi(z)\times\varphi(z')}$ (i)

Soit : $M(a,b)\in F$, $a>0$, $b\in\mathbb{R}$

$z\in E$

$\varphi(z)=M(a,b) \iff M(x^2,y)=M(a,b)$

$\iff \begin{pmatrix}x^2&y\\0&x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}$

$(a>x>0) \iff x=\sqrt{a}$, $y=b$

alors :

$\boxed{\varphi \text{ est bij de } E \longrightarrow F}$ (ii)

$\boxed{\text{(i), (ii)} \Rightarrow \varphi \text{ est un isomorphisme de } (E,*) \text{ vers } (F,\times)}$

$\boxed{c}$: comme .

- $(E,*)$ est un grp commutatif
- $\varphi : (E,*)\to(F,\times)$ est un iso

alors :

$\boxed{(F,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

Fin structure.

Exercice II : les nombres complexes.

Soit $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$:

$(E) : z^2-(1+i)(m+1)z+2im=0$

$\boxed{1-a}$. $\Delta=(1+i)^2(m+1)^2-2im$

$\boxed{(1+i)^2=2i}$ $=(1+i)^2[(m+1)^2-2m]$

$\boxed{=(1+i)^2(m-1)^2}$

si $\Delta=0 \iff m=1$ or $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Absurde.

d'où : $\boxed{\Delta\neq 0, \forall m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}$

$\boxed{1-b}$ comme : $\Delta=(m-1)^2(1+i)^2$

d'où : $z_1=\dfrac{(m+1)(1+i)+(m-1)(1+i)}{2}=m\times(1+i)$

$z_2=\dfrac{(m+1)(1+i)-(m-1)(1+i)}{2}=1+i$

d'où : les solutions de (E) sont.

$z_1=(1+i).m$, $z_2=1+i$

[2]. Soit $m = e^{i\theta}$ avec : $0 < \theta < \pi$

2-a : comme z_1, z_2 sont les sol. de (E)

d'où : $(E) \Leftrightarrow (z - z_1)(z - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$

alors : $\boxed{\begin{cases} z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) \\ z_1 \cdot z_2 = -2im \end{cases}}$ (*)

on a : $1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)$

$= 2 \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

(d'après la Formule d'Euler).

alors :

$z_1 + z_2 = \left(1 + e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 + e^{i\theta}\right)$

$= 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\theta}{2}$

$= 2\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cos\frac{\theta}{2}$

comme : $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$

d'où : $z_1 + z_2 = 2\sqrt{2} \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)}$

conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \\ \arg(z_1 + z_2) &\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \; [2\pi] \end{aligned}}$$

[2-b] :

$z_1 z_2 = -2im$. (d'après *).

si $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$

d'où : $\exists x \in \mathbb{R}$ tq : $\boxed{m = ix}$

$m = e^{i\theta} \Rightarrow |m| = 1 = |x| \Rightarrow x = \pm 1$

or : $\theta \in]0, \pi[$ d'où : $x > 0$

conclusion : $z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m = i$

d'où : $\boxed{z_1 + z_2 = (1+i)^2 = 2i}$

[II] :

on a : $\Omega(\omega)$ est le milieu du $[CD]$

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2}$

or : $D(d)$ est l'image du $B(b)$ par rotation de centre $O(z_0)$ et d'angle $\theta = \pi/2$

d'où : $d - z_0 = e^{i\theta}(b - z_0)$

$\Leftrightarrow d = ib = i(1+i) \times m$

$\Leftrightarrow \boxed{d = (i-1) \cdot m}$

d'où : $\omega = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i) + (i-1)m}{2}$

donc : $\boxed{\omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}}$

[1-b] : $\frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i) \cdot m - (1+i)}{(1-i)(1-m)} \times 2$

$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} \times 2$ $\boxed{m \neq 1 \text{ car } m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}$

$= \frac{1+i}{i-1} \times 2$

$= \frac{(1+i)(1+i)}{-2} \times 2 = -(1+i)^2$

$\boxed{\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i}$, $z_0 = 0$

[1-c] : $\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i \Rightarrow \begin{cases} (\overline{O\Omega}, \overline{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi] \\ AB = 2 \cdot O\Omega \end{cases}$

$\boxed{\text{alors : } (O\Omega) \perp (AB) \text{ et } AB = 2\, O\Omega}$

II-2 : $(O\Omega)\cap(AB)=\{H(h)\}$.

2-a : on a : $H\in(AB)$ d'où :

les pts A, B, H sont des pts droits. (Alignés), d'où $\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv\pi[\pi]$

$$\arg\left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AB})\equiv\pi\,[2\pi]$$

d'où : $\boxed{\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}}$ $\quad(e^{i\pi}=-1)$

on a : $(OH)\perp(AB)$

d'où : $\arg\left(\frac{z_H-z_O}{z_B-z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(\pi)$.

alors : $\boxed{\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}}$ $\quad(e^{i\frac{\pi}{2}}=i)$

b : $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x\in\mathbb{R}:\frac{h-a}{b-a}=x$

$\frac{h}{b-a}\in i\mathbb{R}\Rightarrow\exists y\in\mathbb{R}:\frac{h}{b-a}=iy$

$$\frac{h-a}{b-a}=x\iff\frac{h}{b-a}=x+\frac{a}{b-a}$$

$$\iff\boxed{iy=x+\frac{1}{m-1}}$$

d'où :

$$\begin{cases} iy = x+\dfrac{1}{m-1}\\ -iy=x+\dfrac{1}{\bar m-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2iy=\frac{1}{m-1}-\frac{1}{\bar m-1}$$

$$iy=\frac{\bar m-m}{2(m-1)(\bar m-1)}$$

d'où : $h=(b-a)\cdot iy$

$$\boxed{h=\frac{(1+i)}{2}\cdot\frac{\bar m-m}{\bar m-1}}$$

Rq : $m,\bar m$ sont $\neq 1$ car $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Conclusion

$$\boxed{h=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{\bar m-m}{\bar m-1}}$$

Fin complexe.

Exercice III : Arith.

On admet que : 2969 est premier

1 : on suppose que $2969\nmid n$.

comme 2969 est premier.
$\{2969\nmid n$.

alors : $2969\wedge n=1$

d'après le Théorème de Bezout.

$\exists(u,v)\in\mathbb{Z}^2 : 2969v+n.u=1$

$$\iff\boxed{nu\equiv1\,[2969]}$$

1-b : on a : $n^8+m^8\equiv0\,[2969]$

d'où : $(u.m)^8\equiv-(n.u)^8\,[2969]$

or : $(n.u)^8\equiv1\,[2969]$

d'où : $\boxed{(u.m)^8\equiv-1\,[2969]}$

alors : $(u.m)^{8\times371}\equiv(-1)^{371}\,[2969]$

d/c : $\boxed{(u.m)^{2968}\equiv-1\,[2969]}$

car : $2968=8\times371$

1-c :

on a : $(u.m)^{2968} \equiv -1 \, [2969]$

d'où : $\exists k \in \mathbb{Z} : (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$

$\Leftrightarrow \exists u', v' \in \mathbb{Z} : (um)u' + 2969.v' = 1$

$(u' = -(u.m)^{2967}$ et $v' = k)$.

d'après : le Théorème de Bezout

on a : $2969 \wedge u.m = 1$

d'où $\boxed{2969 \nmid u.m.}$

1-d : $\begin{cases} 2969 \wedge u.m = 1 \\ 2969 \text{ premier} \end{cases}$

d'après : le Théorème de Fermat, on a

$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 \, [2969]$

d'où $\boxed{(u.m)^{2968} \equiv 1 \, [2969]}$

2-a : on a :

$\begin{cases} (u.m)^{2968} \equiv -1 \, [2969] \; . \; (1\text{-}b) \\ (u.m)^{2968} \equiv 1 \, [2969] \; . \; (1\text{-}d) \end{cases}$

Absurde.

d'où : l'hypothèse dans la question 1 est fausse.

$\boxed{\text{alors : } 2969 \mid n}$

2-b :

$\boxed{\Leftarrow}$: $\begin{cases} n \equiv 0 \, [2969] \\ m \equiv 0 \, [2969] \end{cases}$

$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$

$\boxed{\Rightarrow}$: on a : $2969 \mid n$

d'où : $n \equiv 0 \, [2969]$

Comme dans l'égalité :

$n^8 + m^8 \equiv 0 \, [2969]$

m, n jouent des rôles symétriques

alors : si on suppose que $2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va trouver l'Absurde, $(1 = -1)$

conclusion : $2969 \mid m$

d'où :

$n^8 + m^8 \equiv 0 \, [2969]$

$\Leftrightarrow n \equiv 0 \, [2969]$ et $m \equiv 0 \, [2969]$

CQFD.

Proposés par : SAÏD IBNJAA

Xymath

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4x.\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

$\boxed{1}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right)$

d'où $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty}$ car : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} 4.\frac{x}{e^{x}}\left(1 + \frac{xe^{x}}{2} - e^{x}\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$ car $\lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0$

car : $\lim\limits_{-\infty} xe^{x} = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \frac{x}{e^{x}} = -\infty$

2-a ; la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fncts dérivables sur $\mathbb{R}$

Et ona ; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) + 4x\left(-e^{-x} + 1/2\right)$

$= 4\left(e^{-x} - xe^{-x} + x - 1\right)$

$\boxed{f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})}$

$\boxed{2-b}$: Soit $x \in \mathbb{R}$

ona : $f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1 - x)$.

Si $x < 0$; ona : $\begin{cases} e^{-x} > 1. \\ 1 - x > 0 \end{cases}$

d'où : $\forall x < 0,\ f'(x) > 0$.

Si $x \geq 0$; ona : $e^{-x} \leq 1$.

$x \to 1 - x$ changelesigne en $x = 1$

d'où : $\forall x \in [0;1] : f'(x) \leq 0$

$\forall x \in [1; +\infty[: f'(x) \geq 0$

conclusion :

f str croissante sur $]-\infty, 0]$. et $[1; +\infty[$

f str décroissante sur $[0, 1]$

et ona : le Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{2-c}$

ona : f continue, strictement croissante sur $]3/2, 2[$

alors, f est bijection de $]3/2, 2[$ vers.

$f(]3/2, 2[) =]6\times\left(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1\right); 8(e^{-2})[$

comme. $e^{3/2} \simeq 4,5 > 4$

d'où : $6\left(\frac{1}{e^{3/2}} - \frac{1}{4}\right) < 0$

alors : $0 \in]f(3/2), f(2)[$.

d'où : 0 admet un seul antécédent on le note $\alpha \in]3/2, 2[$

c/c : $\boxed{\exists!\, \alpha \in]3/2, 2[: f(\alpha) = 0}$

$\boxed{2-d}$ $f(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow 4\alpha\left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}}$ car : $\alpha > \frac{3}{2}$

3-a :

on a : f' continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ (produit de fct)

et $f'(0) = f'(1) = 0$

alors : d'après le Théorème de ROLL

$$\boxed{\exists\, x_0 \in]0,1[\;:\; f''(x_0) = 0}$$

3-b : Soit $x \neq x_0 \in [0,1]$

on a : f'' est continue, dérivable sur l'intervalle I d'extrémité x et x_0.

d'après : T.A.F

$$\exists\, c \in I \text{ tq : } f^{(3)}(c) = \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \frac{f''(x) - 0}{x - x_0}$$

Or : $f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x}$ (calcule)

d'où : $f^{(3)}(c) = (3-c)e^{-c} > 0$

car c dans l'intervalle I d'ext x et x_0, $I \subset [0,1]$.

Conclusion : $\forall x \in [0,1],\ x \neq x_0 ;\ \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

3-c :

on a : $\begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \dfrac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

d'où : f'' s'annulle en $x = x_0$ avec changement de signe

alors : $I(x_0, f(x_0))$ est un pt d'inflexion de la courbe C

4-a les branches infinies

on a : • $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$.

$D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 = +\infty \quad \text{car : } \lim_{+\infty} e^{-x} = 0$$

alors : (C_f) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

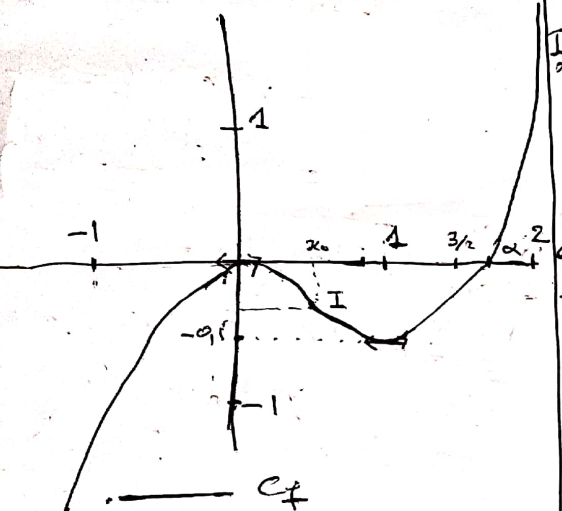
$$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-x}\left(1 + \frac{xe^{x}}{2} - e^{x}\right) = +\infty$$

car, $\lim_{-\infty} e^{x} = 0$, $\lim_{-\infty} xe^{x} = 0$

d'où : (C_f) admet 1 branche parabolique de direction (oy) au Vois de $+\infty$

4-b : représentation graphique.



• $f(0) = f(\alpha) = 0$, $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$

• $f'(0) = f'(1) = 0$, $f(1) = -\frac{1}{2}$

5-a :

d'après le Tableau de variation on a

• $\forall x \in]-\infty, 0]$: $f(x) \leq 0$.

• $\forall x \in [0, \alpha[$: $f(x) \leq 0$

$\boxed{\text{d'où } \forall x \in]-\alpha, \alpha] : f(x) \leq 0}$

5-b :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) dx$$

$$= \int_0^\alpha 4xe^{-x} + 2x^2 - 4x \, dx$$

on a :

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x}\,dx = \left[4xe^{-x}\right]_\alpha^0 + \int_0^\alpha 4e^{-x}$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + \left[4 e^{-x}\right]_\alpha^0$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1)$$

d'où :

$$I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha+1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

on : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ (2-d).

conclusion : (calcule)

$$\boxed{I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)}$$

déduction :

comme : $\forall x \in [0, \alpha] : f(x) \leq 0$

d'où $\int_0^\alpha f(x)\,dx \leq 0$

$\iff \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0$

$\iff \alpha^2 < 3$

$\iff |\alpha| < \sqrt{3}$

on : $\alpha > 2$

$\boxed{\text{d'où : } \alpha \in]2, \sqrt{3}]}$

5-d

$$l'aire = \int_0^\alpha |f(x)|\,dx \text{ u.a}$$

$$= -\int_0^\alpha f(x)\,dx \text{ . u.a}$$

$$\boxed{l'aire = \frac{2}{3}\alpha(3 - \alpha^2) \text{ . cm}^2}$$

Partie II : on définit :

$u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, $u_0 < \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1-a:

pour $n=0$, $u_0 < \alpha$.

Supposons que: $u_n < \alpha$, Montrons que $u_{n+1} < \alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$u_n < \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq 0$ (I-5-a) (H.R)

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \alpha$ CQFD

$\boxed{d/c: \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \alpha}$

1-b:

On a: $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

or: $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \alpha$.

d'après: I-5-a: $f(u_n) \leq 0$

conclusion: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$\boxed{d/c: (u_n) \text{ est décroissante}}$

2-a: Supp que $0 < u_0 < \alpha$.

$g(x) = e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fct dérivables

alors: $g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 > 0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$g(\ln 2)$	$\nearrow$

On a: $\forall x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq g(\ln 2)$.

Or $g(\ln 2) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} > 0$.

Car: $\ln 2 = 0{,}69 > 1/2$.

Conclusion: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : g(x) > 0}$

2-b:

On a: $f(x) + x = 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1\right) + x$

$= \cancel{x\left(4e^{-x} + \frac{4x}{2} - \frac{3}{4}\right)}$

$= 4x\left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{4}\right)$

$\boxed{f(x) + x = 4x\, g(x)}$

Rq: dans l'énoncé il y'a 1 faute

$f(x) + x = x\, g(x)$ doit remplacer par: $f(x) + x = 4x\, g(x)$ ⚠

d/c: $\boxed{f(x) + x = 4x\, g(x)}$

On a: $u_0 \geq 0$.

Pour $n=0$, $u_0 \geq 0$

Supp que: $u_n \geq 0$, Montrons que $u_{n+1} \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4u_n\, g(u_n)$

comme: $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) > 0$

alors: (H.R) $\Rightarrow u_{n+1} = 4u_n\, g(u_n) \geq 0$

d'où: $u_{n+1} \geq 0$

$\boxed{\text{conclusion: } \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0}$

2-c :

on a : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \geq 0$

(U_n) décroissante

alors : (U_n) décroissante, minorée par 0

d'où : (U_n) est convergente

2-d

on a : $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$.
$= h(U_n)$

avec : $h(x) = f(x) + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

et on a : $0 \leq U_n \leq U_0 < \alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$x \to h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$.

alors : $\lim U_{n+1} = \lim h(U_n)$
$= \lim f(U_n) + U_n$.

$\Leftrightarrow \quad l = f(l) + l$

$\Rightarrow \quad f(l) = 0$

or d'après l'étude et la representation de f

on a : $l = 0$ ou $l = \alpha$

or : $U_n \leq U_0 < \alpha$

$\Rightarrow \lim U_n = l \leq U_0 < \alpha$

conclusion :

$\boxed{\lim U_n = 0}$

3 : on suppose que : $U_0 < 0$

3-a ; on a :

$U_{n+1} - U_n = f(U_n)$.

comme : (U_n) est decroissante

alors : $U_n \leq U_0 < 0$

et f croissante sur $]-\infty, 0]$

d'où : $f(U_n) \leq f(U_0)$

$\boxed{\text{c/c} : U_{n+1} - U_n \leq f(U_0)}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

3-b

Pour $n = 0$: $U_0 \leq U_0$

Supp que : $U_n \leq U_0 + n f(U_0)$

Montrons : $U_{n+1} \leq U_0 + (n+1) f(U_0)$

Soit $n \in \mathbb{N}$

on a : $U_{n+1} \leq U_n + f(U_0)$ (3-a)

$\overset{(H.R)}{\leq} U_0 + n f(U_0) + f(U_0)$

$\leq U_0 + (n+1) f(U_0)$

$\boxed{\text{d'où} : \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq U_0 + n f(U_0)}$

3-c : $U_0 < 0 \Rightarrow f(U_0) < f(0) = 0$

$\Rightarrow f(U_0) < 0$

d'où : $\lim U_0 + n f(U_0) = -\infty$

conclusion

$\boxed{\lim U_n = -\infty}$

Fin

SAID
IBN JAA