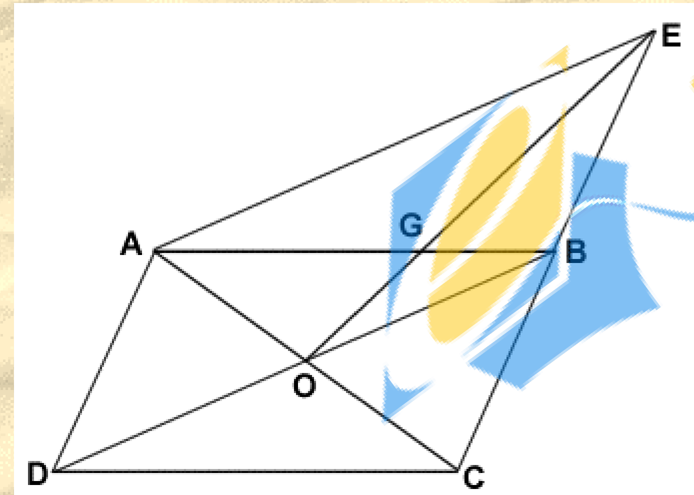
Groupe des Instituts Excel

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

Exercices Corriges

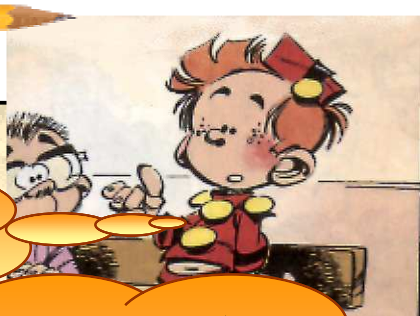
Exercice :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Soit E le symétrique du point C par rapport à B . Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (OE) .
Que représente le point G pour le triangle AEC ?
En déduire que la droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu .



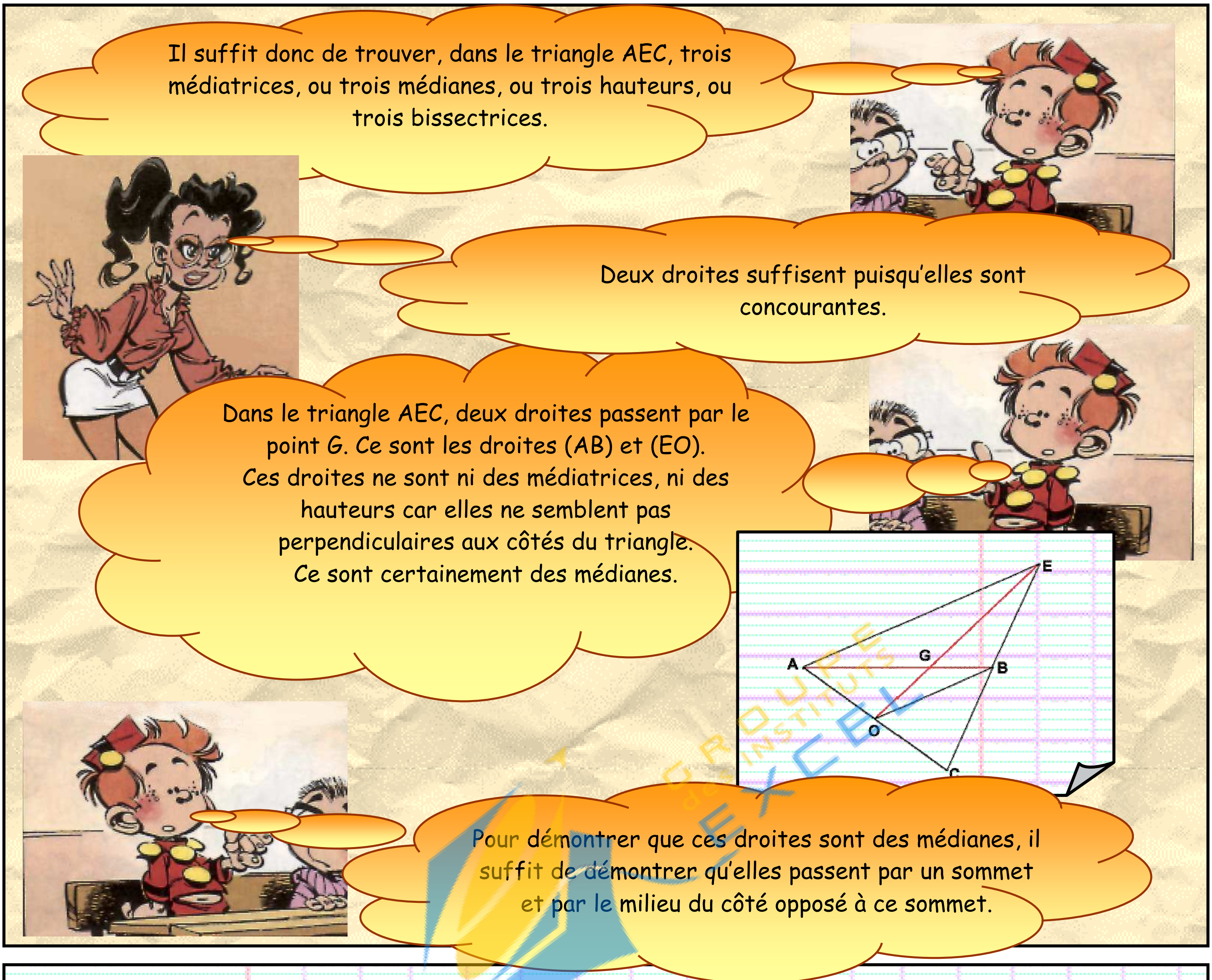
Solution :

▶ Que représente le point G pour le triangle AEC ?



Quelle peut être la nature d'un point pour un triangle ?

Pour un triangle, un point peut, par exemple, être **le centre du cercle circonscrit**(point de rencontre des médiatrices), ou **le centre de gravité**(point de rencontre des médianes), ou **l'orthocentre**(point de rencontre des hauteurs), ou **le centre du cercle inscrit**(point de rencontre des bissectrices).



Nature de la droite (EO) :

Dans le triangle AEC,

O est le milieu de [AC] ([AC] est une diagonale du parallélogramme ABCDde centre O)

E est un sommet du triangle AEC

donc (EO) est la médiane issue de E.

Nature de la droite (AB) :

Dans le triangle AEC,

B est le milieu de [AC] (E le symétrique du point C par rapport à B)

A est un sommet du triangle AEC

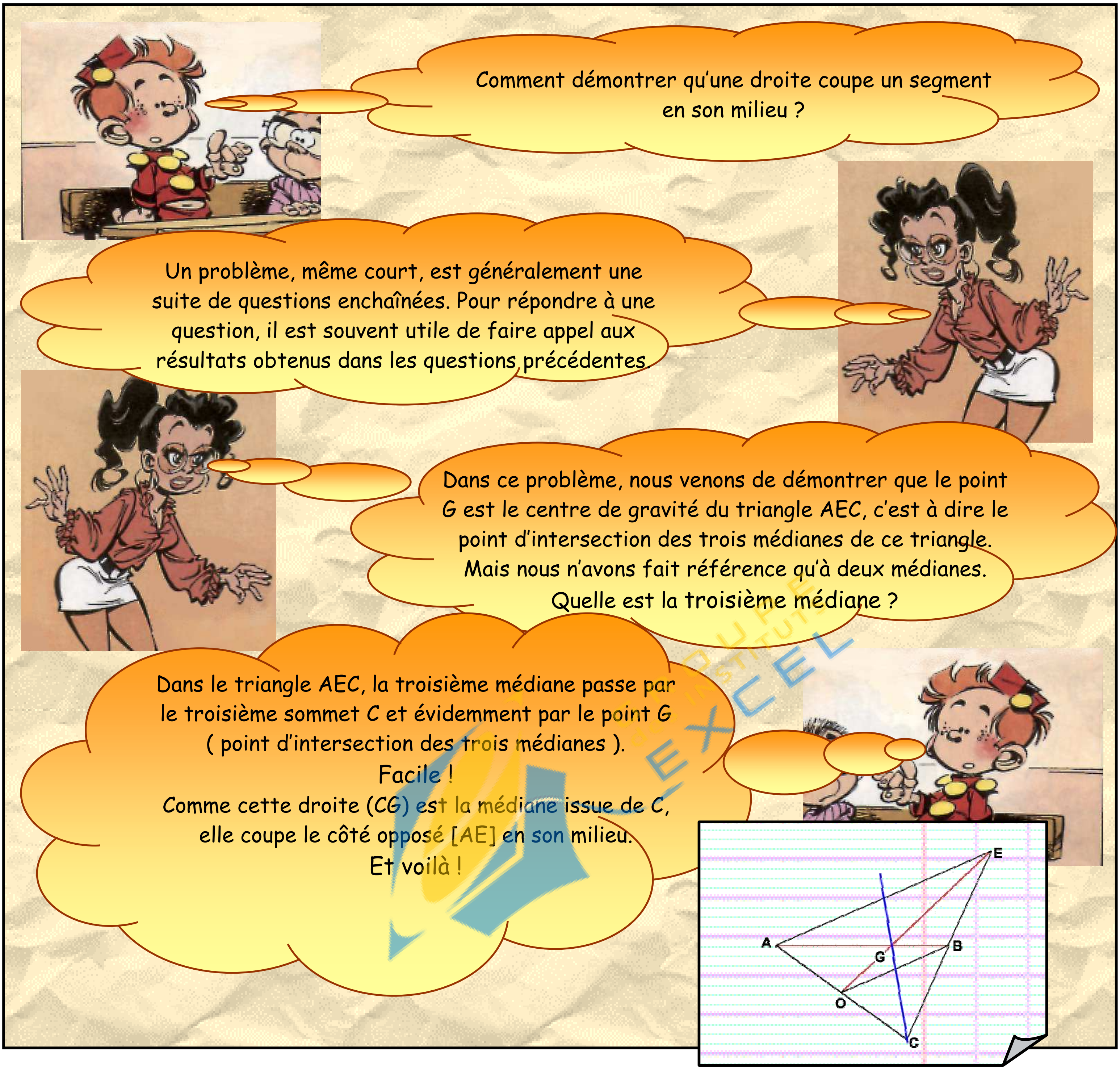
donc (AB) est la médiane issue de A.

Conclusion :

Dans le triangle AEC , les droites (EO) et (AB) sont des médianes. Elles sont sécantes en G.

Donc $\boxed{\text{G est le centre de gravité du triangle AEC.}}$

▶ En déduire que la droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu.



▶ La droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu ?

Nature de la droite (CG) :

Dans le triangle AEC, la droite (CG) passe par le sommet C et par le centre de gravité du triangle.

Donc la droite (CG) est la médiane issue de C du triangle AEC.

Conclusion :

Par définition, la médiane (CG) issue du sommet C coupe le côté opposé [AE] en son milieu.

La droite (CG) coupe le segment [AE] en son milieu

Exercice :

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

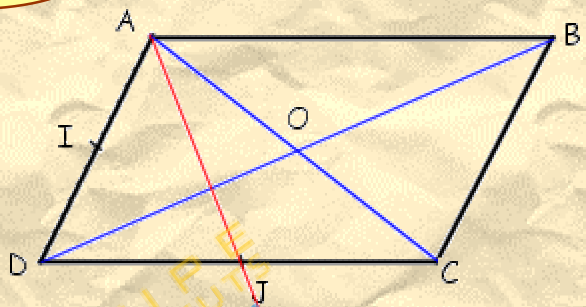
Soit I le milieu de [AD] et soit J le milieu de [DC].

a)Que représente la droite (AJ) pour le triangle ADC ?

b)Montrer que les droites (AJ), (CI) et (DB) sont concourantes.

Solution :

Toujours faire un dessin, même si le texte de l'énoncé ne le demande pas .



Que peut représenter une droite pour un triangle ?

Pour un triangle, une droite peut, par exemple, être **une médiatrice** ou **une médiane** ou **une hauteur** ou enfin une bissectrice.

Comment choisir ?

Dans le triangle ADC , la droite (AJ) passe par un sommet (le sommet A). De plus, d'après l'énoncé, le point J est un milieu, le milieu de [DC]. Parmi les droites remarquables d'un triangle, quelle est celle qui passe par un sommet et par le milieu d'un côté ?

La médiatrice ?

Non ! La médiatrice passe par le milieu d'un côté , mais généralement pas par un sommet (sauf dans la cas particulier d'un triangle isocèle).
Par contre une médiane est une droite issue d'un sommet qui passe par le milieu du côté opposé à ce sommet. La droite (AJ) est donc une médiane .

▶ a)Que représente la droite (AJ) pour le triangle ADC ?

Dans le triangle ADC, la droite (AJ) passe par le sommet A. De plus , elle passe par le point J milieu de [DC] (hypothèse) donc

(AJ) est la médiane issue de A du triangle ADC.

Autre rédaction possible :

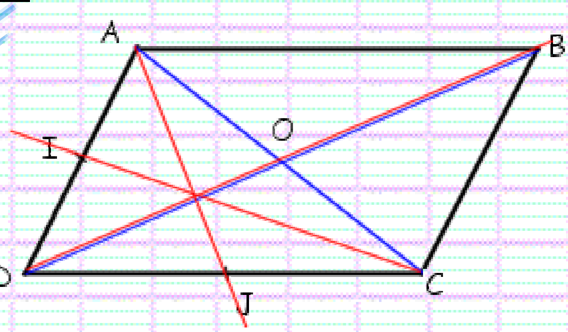
Dans le triangle ADC
A est un sommet (!!!)
J milieu de [DC] (hypothèse)
Donc

(AJ) est la médiane issue de A du triangle ADC.

▶ b) Les droites (AI), (CJ) et (DB) sont-elles concourantes ?

➤ Dans le triangle ADC, la droite (CI) passe par le sommet C.
De plus , elle passe par le point I milieu de [AD]
(hypothèse) donc

(CI) est la médiane issue de C du triangle ADC.



➤ O est le centre du parallélogramme ABCD , donc O est le milieu des diagonales, et, en particulier, de la diagonale [AC] .
Dans le triangle ADC, la droite (DO) passe par le sommet D et par le milieu O du côté [AC], donc

(DO) est la médiane issue de D du triangle ADC.

Autre rédaction possible :

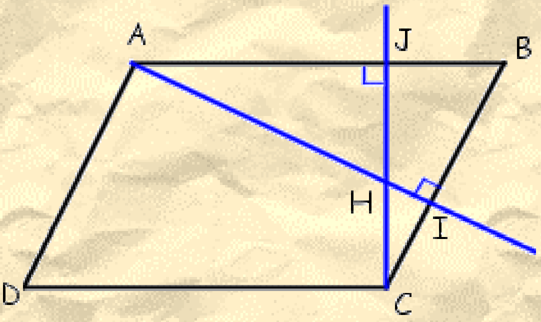
Dans le triangle ADC
D est un sommet (!!!)
O milieu de [AC] (O centre du parallélogramme ABCD)
Donc (DO) est la médiane issue de D du triangle ADC.

Les droites (AI) , (CJ) et (BO) (ou (BD)) sont les médianes du triangle ADC, donc

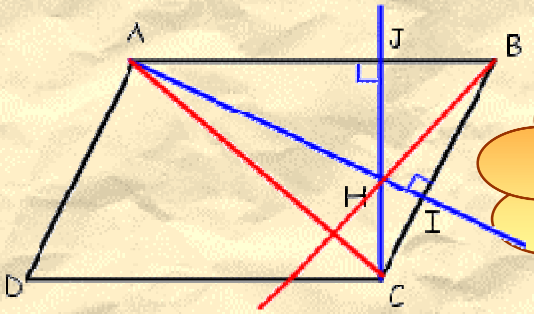
Les droites (AI), (CJ) et (DB) sont-elles concourantes

Exercice :

ABCD est un parallélogramme. (cf. figure ci-contre)
Les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.
Les droites (CJ) et (AB) sont perpendiculaires.
Soit H le point d'intersection de (AI) et de (JC).
Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC) ?



Solution :



Comment démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC) ?

Parmi tous les outils dont nous disposons, lequel permet de répondre à la question ?
En regardant le dessin, nous constatons que trois droites, parmi lesquelles se trouve la droite (BH), sont concourantes. Ces droites ne seraient-elles pas des médiatrices ou des médianes ou des bissectrices ou des hauteurs d'un triangle particulier ?

On peut prendre le triangle ABC. Les deux droites (AI) et (CJ) sont des hauteurs . La droite (BH) est la troisième hauteur …

FICHE 2

Comment démontrer que ?

COMMENT DÉMONTRER QUE DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES ?

DEUX DROITES SONT PERPENDICULAIRES

- Il suffit de démontrer que l'angle formé par les deux droites est un angle droit.
- Il suffit d'utiliser la propriété suivante : " Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. "
- Il suffit de démontre que l'une des droites est la médiatrice d'un segment de l'autre droite
- Il suffit de démontrer que les deux droites sont des côtés particuliers d'un triangle rectangle (ou d'un rectangle)
- Il suffit de démontrer que ces deux droites sont les diagonales d'un losange.
- Il suffit de démonter que l'une des droites est pour un triangle particulier une hauteur (ou une médiatrice)
- Il suffit d'utiliser la propriété suivante : " Dans un triangle isocèle, la médiane, la hauteur, la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice de la base (côté opposé au sommet principal) sont confondues. "
- Il suffit d'utiliser la conservation de la perpendicularité par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une ~~translation~~ ou une ~~rotation~~.

Redaction :

Dans le triangle ABC :

- (AI) passe par le sommet A
  (AI) est perpendiculaire au côté [BC]

  donc (AI) est la hauteur issue de A

- (CJ) passe par le sommet C
  (CJ) est perpendiculaire au côté [AB]

  donc (CJ) est la hauteur issue de C

- Les deux hauteurs du triangle ABC se coupent en H, donc H est l'orthocentre du triangle ABC .

La droite (BH) qui passe par le troisième sommet B et par l'orthocentre H est la hauteur issue de B.
Par définition de la hauteur , la droite (BH) est perpendiculaire au côté opposé [AC].

(BH) est perpendiculaire à (AC)

A retenir : Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires :

losange.

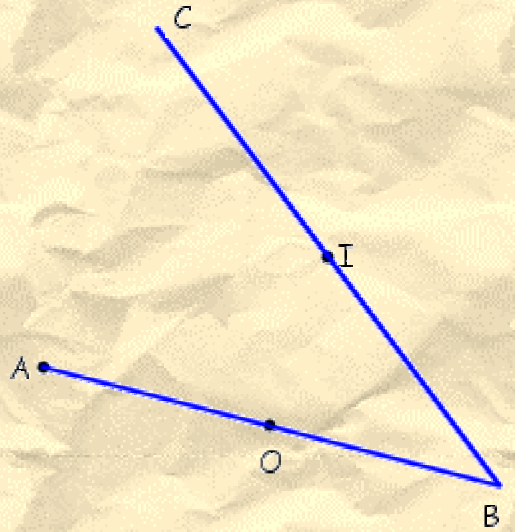
Il suffit de démonter que l'une des droites est pour un triangle particulier une hauteur (ou une médiatrice)

Exercice :

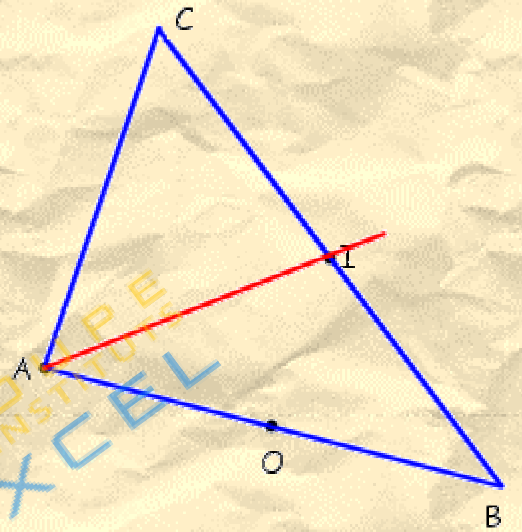
Soient A, I et O 3 points non alignés.
On appelle B le symétrique de A par rapport à O, et C le symétrique de B par rapport à I.
a)Faire une figure soignée.
b)Que représente la droite (AI) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
c)Que représente la droite (CO) pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.
d)On appelle G le point d'intersection des droites (AI) et (OC).
   Démontrer que la droite (BG) coupe le segment [AC] en son milieu.

Solution :

▶ a) Figure :



▶ b)Nature de la droite (AI) pour le triangle ABC :



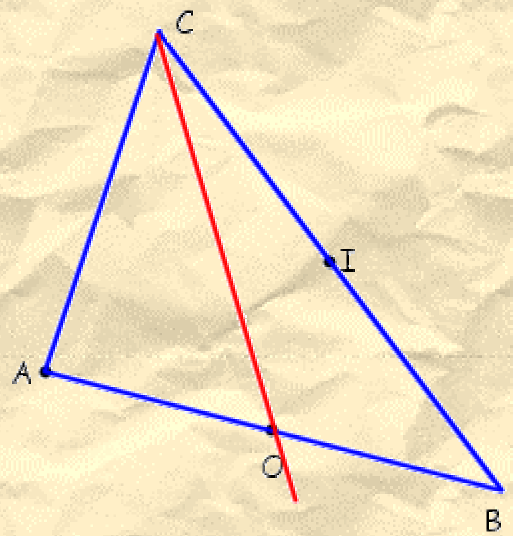
Dans le triangle ABC :

A est un sommet

I est le milieu de [BC] (C est le symétrique de B par rapport à I)

Donc (AI) est la médiane issue de A pour le triangle ABC

▶ c)Nature de la droite (CO) pour le triangle ABC :



Dans le triangle ABC :

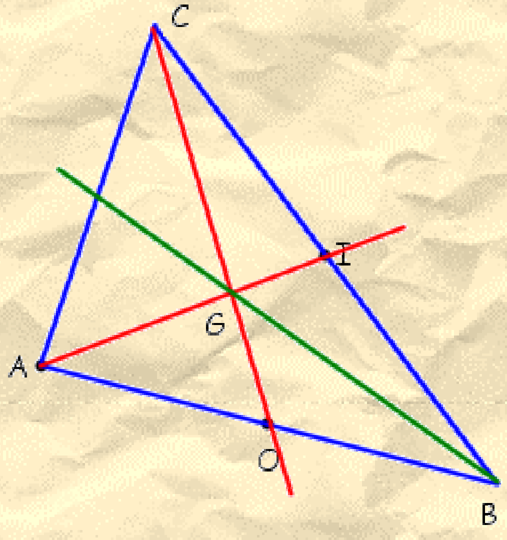
C est un sommet

O est le milieu de [AB] (B est le symétrique de A par rapport à O)

Donc (CO) est la médiane issue de C pour le triangle ABC

▶ d) La droite (BG) coupe-t-elle le segment [AC] en son milieu ?

G est le point d'intersection des droites (AI) et (CO).



Dans le triangle ABC, les médianes (AI) et (CO) se coupent en O.
Le point G est donc le centre de gravité.
La droite (BG) issue du troisième sommet B et qui passe par le centre de gravité G est la médiane issue de B
Par définition, la médiane (BG) coupe le côté [AC] en son milieu

La droite (BG) coupe le segment [AC] en son milieu.