

Groupe des Instituts Excel

REPÈRE DU PLAN

Objectifs d'apprentissage

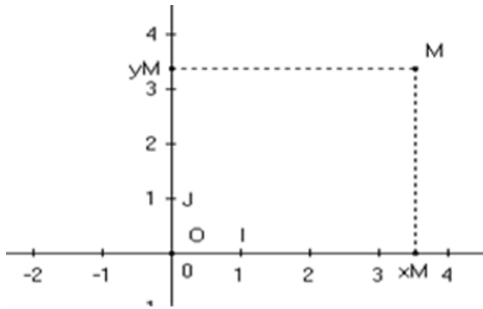
- ✓ Connaître un repère orthonormé.
- ✓ Connaître les coordonnées d'un point / d'un vecteur.
- ✓ Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- ✓ Calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs.
- ✓ Calculer les coordonnées du produit d'un vecteur par un nombre réel.
- ✓ Calculer la distance entre deux points.
- ✓ Résoudre des problèmes géométriques en utilisant le repère et les coordonnées.

Prérequis

- ⊗ Placer un point dans un repère.
- ⊗ Déterminer les coordonnées d'un point.
- ⊗ Calculer la distance entre deux points sur une droite graduée.
- ⊗ Vecteurs et translation.

Activités

Activité 1: Recopie et complète les phrases suivantes :



- ♦ (O ; I ; J) est appelé.....
- ♦ O est
- ♦ (OI) est appelé
- ♦ (OJ) est appelé
- ♦ x_M est appelé
- ♦ y_M est appelé
- ♦ Le couple $(x_M ; y_M)$ s'appelle

2) Détermine les coordonnées des points : O et I et J.

3) Dans un repère (O ;I,J) Place les points :

$A(1 ; -2)$; $B(-3 ; 4)$

$D(4 ; 0)$; $C(0 ; -5)$

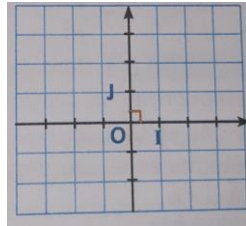
Contenu de la leçon

I- Coordonnées d'un point dans un repère du plan :

1) Repère du plan :

*** Définition :** Deux axes gradués et sécantes (OI) et (OJ) forment ce qu'on appelle **un repère du plan**.

- Le point O est l'**origine** du repère (O, I, J).
- La droite (OI) est l'**axe des abscisses**.
- La droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**.



*** Remarque :** Un repère est dit :

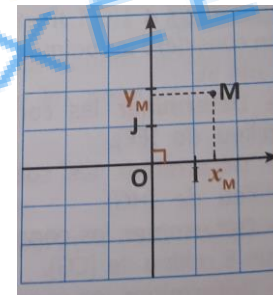
- **Orthogonal** si $(OI) \perp (OJ)$
- **Orthonormé** si $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.

2) Coordonnées d'un point :

*** Définition :** Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

A tout point M du plan, on associe un unique couple (x_M, y_M) de nombres réels appelé **couple de coordonnées** du point M dans le repère.

Avec : $\begin{cases} x_M \text{ est appelé } \textit{abscisse} \text{ du point } M \\ y_M \text{ est appelé } \textit{ordonnée} \text{ du point } M \end{cases}$



*** Exemples :** Soit (O, I, J) un repère orthonormé.

Placer les points suivants : $A(2,4)$; $B(-2,1)$; $C(-4,-2)$ et $D(3,-4)$.

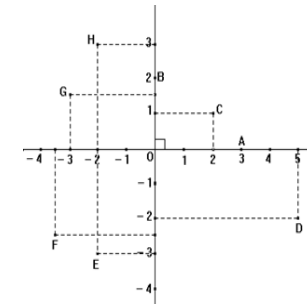
Evaluation

Exercice 1: (O, I, J) est un repère orthonormé.

Placer les points suivants : $A(-2, -3)$

$B(-3,1)$; $C(\frac{1}{2}, -2)$; $D(0,2)$; $E(-3,0)$

Exercice 2: Dans le repère ci-dessous, on a placé les points A, B, C, D, E, F, G et H.



Ecrire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

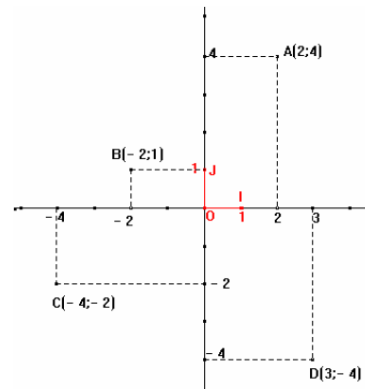
Exercice 3: (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : $A(-4,3)$; $B(0,1)$; $C(7,3)$ et $D(4,5)$.

1) Déterminer les coordonnées du point M le milieu de [AB].

2) Déterminer les coordonnées du point N le milieu de [CD].

3) Déterminer les coordonnées du point E tel que A le milieu de [EC].

4) Déterminer les coordonnées du point F tel que N soit le symétrique de F par rapport à M.



- * Remarque :** - Si (O, I, J) un repère orthonormé, alors : $O(0,0)$; $I(1,0)$ et $J(0,1)$.
- Si $M \in (OI)$ alors : $M(x_M, 0)$.
 - Si $M \in (OJ)$ alors : $M(0, y_M)$.

3) Coordonnées du milieu d'un segment :

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) soient les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et M le milieu du segment $[AB]$.

Le couple de coordonnées du point M est : $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient les points $A(2,3)$ et $B(-2,1)$.

Déterminer le couple de coordonnées du point E le milieu de $[AB]$.

$$\rightarrow * x_E = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$* y_E = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Alors : $E(0,2)$

II- Coordonnées d'un vecteur :

1) Coordonnées d'un vecteur :

Exercice 4 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : $A(2, -4)$; $B(-4,5)$ et $M(-1, \frac{1}{2})$.
Montrer que A est le symétrique de B par rapport à M .

Exercice 5 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : $A(-5,2)$; $B(-1,-1)$; $C(3,1)$ et $D(2,-3)$.
Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : \vec{AB} ; \vec{CD} ; \vec{DB} ; \vec{CA} .

Exercice 6 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points A , B et M tel que M le milieu de $[AB]$.
Déterminer dans chaque cas les coordonnées du vecteur \vec{AB} et celles du point M .

1) $A(-4,-3)$ et $B(1,5)$; 4)

2) $A(0,3)$ et $B(-2,5)$

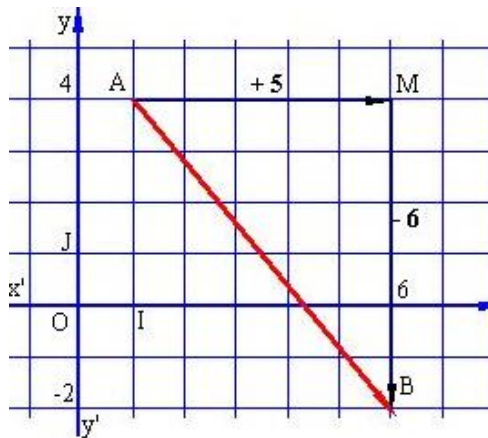
Exercice 7 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : $A(3,7)$; $B(-2,4)$ et $C(-3,-2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que : $\vec{AB} = \vec{CD}$

Activités

Activité 2 : Soit les points A(1;4) et

B(6;-2).

Les coordonnées de vecteur d'origine A et d'extrémité B expriment les déplacements qu'il faut effectuer pour aller de A à B, **en suivant des chemins parallèles aux axes.**



D'où : $\overrightarrow{AB}(5; -6)$

- 1) Calcule $x_B - x_A$ puis $y_B - y_A$
- 2) Que peut-on déduire ?
- 3) Calcule Les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{JB} ; \overrightarrow{OA}

Contenu de la leçon

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) soient les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Le couple de coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} est : $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient les points $A(4,2)$ et $B(3, -1)$.

Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

→ On a : $\begin{cases} x_B - x_A = 3 - 4 = -1 \\ y_B - y_A = -1 - 2 = -3 \end{cases}$ alors : $\overrightarrow{AB}(-1, -3)$.

2) Vecteurs égaux :

*** Propriété :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) soient \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} deux vecteurs non nuls.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que : $\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient les points $A(3,3)$, $B(1, -4)$ et $C(-2, -2)$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

→ ABCD un parallélogramme signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Donc : $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$, signifie : $\begin{cases} 1 - 3 = -2 - x_D \\ -4 - 3 = -2 - y_D \end{cases}$

signifie : $\begin{cases} -2 = -2 - x_D \\ -7 = -2 - y_D \end{cases}$, signifie : $\begin{cases} x_D = -2 + 2 \\ y_D = -2 + 7 \end{cases}$, alors : $\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 5 \end{cases}$

D'où : $D(0,5)$.

3) Règles de calcul :

Evaluation

Exercice 8 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(4,1) ; B(0,4) ; C(-3,-2) et D(1,-5).

1) Montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

2) Déterminer les coordonnées du point O le centre du parallélogramme ABCD.

Exercice 9 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(3,2) ; B(1,-6) ; C(-4,-1) et D(-2,2).

1) Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{EF} tel que : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

2) Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} tel que : $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{EF}$.

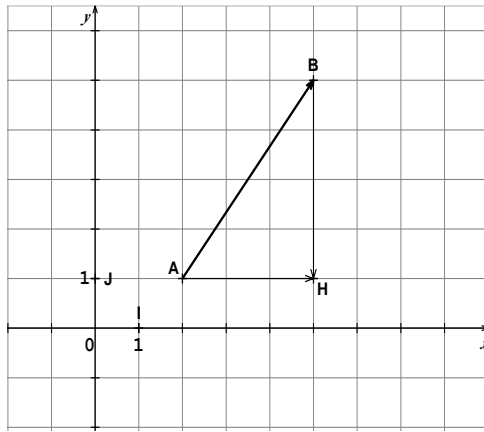
Exercice 10 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points A, B, C et D tel que : $\overrightarrow{AB}(2,3)$; C(-1,-5) et D(3,1).

Calculer les distances : OC ; AB ; CD.

Exercice 11 : (O, I, J) est un repère orthonormé. On considère les points suivants : A(-1,2) ; B(-3,6) et C(-7,-1).

Activités

Activité 3 : On considère la figure suivante :



1) Vérifier que : $AH = x_B - x_A$ et

$$BH = y_B - y_A$$

2) Quelle est la nature du triangle ABH?

3) Montrer que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Contenu de la leçon

*** Propriété :** Soient $\vec{AB}(x, y)$ et $\vec{CD}(x', y')$ deux vecteurs et k un nombre réel, alors : $\vec{AB} + \vec{CD}(x + x', y + y')$ et $k\vec{AB}(kx, ky)$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient $\vec{AB}(2, 3)$ et $\vec{CD}(-1, 5)$.

1) Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AB} + \vec{CD}$.

2) Déterminer les coordonnées du vecteur $\frac{1}{3}\vec{AB}$.

→ 1) On a $\vec{AB}(2, 3)$ et $\vec{CD}(-1, 5)$ alors : $\vec{AB} + \vec{CD}(2 + (-1), 3 + 5)$

Donc : $\vec{AB} + \vec{CD}(1, 8)$.

2) On a $\vec{AB}(2, 3)$, donc : $\frac{1}{3}\vec{AB}(\frac{1}{3} \times 2, \frac{1}{3} \times 3)$, alors : $\frac{1}{3}\vec{AB}(\frac{2}{3}, 1)$.

III- Distance entre deux points dans un repère orthonormé :

*** Propriété :** Si dans un repère orthonormé, on a : $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors la distance entre les points A et B est donné par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , soient les points $A(3, -2)$ et $B(5, -1)$.

Calculer la distance AB.

$$\begin{aligned} \rightarrow AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-1 - (-2))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-1 + 2)^2} = \sqrt{4 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

*** Remarque :** Si dans un repère orthonormé on a : $\vec{AB}(x, y)$, alors la distance AB est donné par : $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$.

*** Exemple :** Dans un repère orthonormé (O, I, J) , on a $\vec{AB}(-3, 5)$, alors : $AB = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$

Evaluation

1) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.

2) En déduire que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 12 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On considère les points suivants : $A(4, -2)$; $B(2, 0)$ et $C(6, 2)$.

1) Construis les points A, B et C.

2) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.

Exercice 13 : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

1) Construis les points : $A(2, -4)$; $B(3, 4)$; $C(-1, 3)$; $D(-2, -2)$; $E(0, -3)$ et $F(2, 0)$.

2) Déterminer les coordonnées du point M le milieu de [AC].

3) Déterminer les coordonnées du point N tel que F le milieu de [DN].

4) Montrer que : $\vec{AB}(1, 8)$.

5) Calculer AB et DC.

6) Déterminer les coordonnées du point K l'image de A par la translation de vecteur \vec{BC} .

7) Déterminer les coordonnées du point R tel que : $\vec{AR} = 2\vec{AF} - \vec{BE}$.