

تصحيح وطني 2020 الدورة العادية - علوم تجريبية

التمرين الأول (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

(1) أحسب u_1	0.25
(2) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$	0.5
(3) أ) بين أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
ب) أحسب النهاية $\lim u_n$	0.5
(4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$	0.75
ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$	1

التمرين الثاني (5 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة : $z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$: (E)

أ) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = -4\sqrt{6} - \sqrt{2}^2$

ب) استنتج حلي المعادلة (E)

(2) نعتبر الأعداد العقدية : $a = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i\sqrt{6} - \sqrt{2}$ و $b = 1 + i\sqrt{3}$ و $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

أ) تحقق من أن $b\bar{c} = a$ و استنتج أن $ac = 4b$

ب) أكتب العددين العقديين b و c على الشكل المثلثي

ج) استنتج أن $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

(3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $O, \vec{u}, \vec{v}$ ، نعتبر النقط B و C و D التي

ألحاقها على التوالي هي b و c و d حيث $d = a^4$.

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O

و زاويته $\frac{\pi}{12}$

أ) تحقق أن $z' = \frac{1}{4}az$

ب) حدد صورة النقطة C بالدوران R

ج) حدد طبيعة المثلث OBC

د) بين أن $a^4 = 128b$ و استنتج أن النقط O و B و D مستقيمية

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $0, +\infty$ بما يلي : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$	
(1) أ) بين أن لكل x من المجال $0, +\infty$ ، $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$	0.5
ب) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $1, +\infty$	0.5
ج) استنتج أن لكل x من المجال $1, +\infty$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)	0.5
د) بين أن لكل x من المجال $1, +\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$	1
(2) أ) بين أن الدالة G المعرفة بما يلي : $G(x) = x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $0, +\infty$	0.75
ب) أحسب التكامل $\int_1^4 g(x) dx$	0.75

المسألة (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2} - 4$	
و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $O, \vec{i}, \vec{j}$ (الوحدة : 2cm)	
(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	0.5
(2) أ) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب للمنحنى C بجوار $-\infty$	0.5
ب) حل المعادلة $e^{x-2} - 4 = 0$ ثم بين أن المنحنى C يوجد فوق Δ على المجال $2 + \ln 4, +\infty$ وتحت Δ على المجال $2 + \ln 4, +\infty$	0.75
(3) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = -\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا	0.5
(4) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -e^{x-2} - 1$	0.5
ب) ضع جدول تغيرات الدالة f	0.25
(5) أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $A(2, 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى C	0.75
(6) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$	0.5
(7) أنشئ Δ و C في نفس المعلم $O, \vec{i}, \vec{j}$ (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين : $\ln 2 \simeq 0,7$ و $\ln 3 \simeq 1,1$)	1
(8) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$	0.5
ب) أنشئ في نفس المعلم $O, \vec{i}, \vec{j}$ المنحنى الممثل للدالة f^{-1} (لاحظ أن المستقيم Δ عمودي على المنصف الأول للمعلم)	0.75
ج) أحسب $f^{-1}(2 - \ln 3)$ (لاحظ أن $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)	0.5

تصحيح التمرين الأول

$$u_1 = \frac{2u_0}{2u_0 + 5} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8} \quad (1)$$

(2) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$

✓ من أجل $n = 0$

$$u_0 = \frac{3}{2} \text{ لدينا}$$

إذن : $u_0 > 0$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n > 0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1} > 0$

حسب الافتراض ، لدينا $u_n > 0$

إذن $2u_n > 0$ و $2u_n + 5 > 0$

$$\text{إذن } \frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0$$

و منه $u_{n+1} > 0$

✓ نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n > 0$

(3 أ)

○ ليكن $n \in \mathbb{N}$

■ نعلم أن $u_n > 0$ إذن من الواضح أن $u_{n+1} > 0$

■ لدينا $5 \leq 2u_n + 5$

$$\text{إذن } \frac{1}{2u_n + 5} \leq \frac{1}{5}$$

$$\text{إذن } \frac{1}{2u_n + 5} \times 2u_n \leq \frac{1}{5} \times 2u_n$$

$$\text{إذن } u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$$

نستنتج أن $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ لنبين بالترجع أن $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n = 0$

$$\text{لدينا : } u_0 = \frac{3}{2} \text{ و } \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^0 = \frac{3}{2}$$

$$\text{إذن : } 0 < u_0 \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^0$$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\triangleright \text{ نفترض أن } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

$$\triangleright \text{ و نبين أن } 0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}$$

$$\boxed{\text{نعلم أن } 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n} \quad (1)$$

$$\text{وحسب الافتراض لدينا : } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n$$

$$\boxed{\text{إذن } 0 < \frac{2}{5} u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}} \quad (2)$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن } 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}$$

$$\text{وبالتالي : } 0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}$$

$$\checkmark \text{ نستنتج أن } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

(ب)

$$\circ \text{ لدينا } 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\circ \text{ بما أن } -1 < \frac{2}{5} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0 \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0$$

$$\text{إذن حسب مبرهنة الدرك : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

(4) أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$
لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{4\left(\frac{2u_n}{2u_n + 5}\right)}{2\left(\frac{2u_n}{2u_n + 5}\right) + 3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n + 5}}{\frac{4u_n + 6u_n + 15}{2u_n + 5}} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n + 15} \\ &= \frac{2 \times 4u_n}{5 \times (2u_n + 3)} \\ &= \frac{2}{5} \times v_n \end{aligned}$$



إذن : $v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\triangleright \text{لدينا } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{5} \text{ و حدها الأول } 1 = \frac{6}{6} = \frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right) + 3} = \frac{4u_0}{2u_0 + 3} = v_0$$

$$\text{إذن : } v_n = v_0 \times q^n$$

$$\text{إذن : } v_n = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{و منه : } \boxed{v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

لدينا: $\triangleright$

$$\begin{aligned} v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3} &\Leftrightarrow 4u_n = 2u_n v_n + 3v_n \\ &\Leftrightarrow 4u_n - 2u_n v_n = 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n(4 - 2v_n) = 3v_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n}{4 - 2v_n} \end{aligned}$$

لكل n من $\mathbb{N}$

$$u_n = \frac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

إذن :

تصحيح التمرين الثاني

(1) أ

$$\begin{aligned} \Delta &= -2\sqrt{2} + \sqrt{6}^2 - 4 \times 1 \times 16 \\ &= 4(8 + 2\sqrt{12}) - 64 \\ &= -32 + 8\sqrt{12} \\ &= -4 \cdot 8 - 2\sqrt{12} \\ &= -4\sqrt{6}^2 - 2\sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 \\ &= -4\sqrt{6} - \sqrt{2}^2 \end{aligned}$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$

$$\Delta = -4\sqrt{6} - \sqrt{2}^2 \text{ لدينا}$$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$$z = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} + i2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - i2\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$z = \sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad z = \sqrt{2} + \sqrt{6} - i\sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$S = \sqrt{2} + \sqrt{6} - i\sqrt{6} - \sqrt{2} ; \sqrt{2} + \sqrt{6} + i\sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{و بالتالي :}$$

(2 أ)

○

$$\begin{aligned} b\bar{c} &= 1+i\sqrt{3} \quad \sqrt{2}-i\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i\sqrt{6}-\sqrt{2} \\ &= a \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned} ac &= b\bar{c}c \\ &= b \times |c|^2 \\ &= b \times \left(\sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} \right)^2 \\ &= 4b \end{aligned}$$

(ب)



▷ لدينا : $b = 1+i\sqrt{3}$

معيار العدد b : $|b| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$b = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

▷ لدينا : $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

معيار العدد c : $|c| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$c = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

(ج) لدينا $ac = 4b$

$$a = 4 \frac{b}{c} \quad \text{إذن}$$

$$a = 4 \frac{2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)}{2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)} = 4 \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) \quad \text{إذن}$$

(3 أ)

z' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{12}$

$$\begin{aligned} z' - 0 &= e^{i\frac{\pi}{12}}(z - 0) \\ z' &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) z \\ z' &= \frac{1}{4}az \end{aligned}$$

(ب) لنحدد صورة النقطة C بالدوران R

$$\frac{1}{4}ac = \frac{1}{4} \times 4b = b \quad \text{لدينا}$$

إذن B هي صورة C بالدوران R

(ج) لدينا B هي صورة C بالدوران R

$$\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{12} 2\pi \quad \text{و} \quad OC = OB$$

و منه المثلث OBC متساوي الساقين

(د)

$$\triangleright \text{لدينا } a = 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

إذن حسب علاقة موافر :

$$a^4 = 4^4 \left(\cos\left(4\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(4\frac{\pi}{12}\right) \right) = 256 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 256 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 128(1 + i\sqrt{3}) = 128b$$

$$\frac{d-0}{b-0} = \frac{a^4}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \quad \triangleright$$

بما أن $\frac{d-0}{b-0} \in \mathbb{R}$ فإن النقط O و B و D مستقيمية.

تصحيح التمرين الثالث

(1) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$

ليكن $x \in 0, +\infty$

لدينا: $g'(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

إذن: لكل x من المجال $0, +\infty$ ، $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

(ب) ليكن $x \in 1, +\infty$

لدينا $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

نعلم أن $x \geq 1$

إذن $\sqrt{x} \geq 1$

إذن $\sqrt{x}-1 \geq 0$

و منه $g'(x) \geq 0$ لكل x من $1, +\infty$

و بالتالي الدالة g تزايدية على المجال $1, +\infty$

(ج) ليكن $x \in 1, +\infty$

▷ لدينا $1 \leq x$ إذن $0 \leq \ln x$

▷ ولدينا $1 \leq x$ و الدالة g متصلة و تزايدية على المجال $1, +\infty$

إذن $g(1) \leq g(x)$

إذن $0 \leq 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$ (لأن $g(1) = 0$)

إذن $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$

وبما أن $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$

فإن $\ln x \leq 2\sqrt{x}$

○ نستنتج أن لكل x من المجال $1, +\infty$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

(د)

▷ ليكن $x \in 1, +\infty$

لدينا حسب نتيجة السؤال (1) (ج) : $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

إذن : $0 \leq \ln x^3 \leq 8x\sqrt{x}$

$$\text{إذن : } 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$

$$\text{و منه : لكل } x \text{ من المجال } 1, +\infty, 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

$$\triangleright \text{ لدينا لكل } x \text{ من المجال } 1, +\infty, 0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{إذن حسب مبرهنة الدرك : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3}{x^2} = 0$$

(2 أ)

✓ الدالة G قابلة للاشتقاق على $0, +\infty$ (كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق على $0, +\infty$)

✓ ليكن $x \in 0, +\infty$

لدينا :

$$\begin{aligned} G' x &= \left(x \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) \right)' \\ &= x' \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) + x \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right)' \\ &= 1 \times \left(-1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x \right) + x \times \left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \\ &= -1 + \frac{4}{3} \sqrt{x} - \ln x + \frac{2}{3} \sqrt{x} - 1 \\ &= 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \\ &= g x \end{aligned}$$

إذن : $G' x = g x$ لكل x من المجال $0, +\infty$

○ وبالتالي G هي دالة أصلية للدالة g على $0, +\infty$

(ب)

$$\begin{aligned} \int_1^4 g x dx &= [G x]_1^4 \\ &= G 4 - G 1 \\ &= 4 \left(\frac{5}{3} - \ln 4 \right) - 1 \left(\frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{19}{3} - 4 \ln 4 \end{aligned}$$

تصحيح المسألة

(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}e^{x-2} - 4 = +\infty \quad \triangleright$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \frac{5}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}e^{x-2} - 4 = -\infty \quad \triangleright$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{5}{2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}e^{x-2} - 4 = 0 \quad \text{(2) أ) لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} - 4 = -4 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحنى C بجوار $-\infty$

(ب)

$$\triangleright \text{لنحل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة : } e^{x-2} - 4 = 0$$

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{x-2} - 4 = 0 &\Leftrightarrow e^{x-2} = 4 \\ &\Leftrightarrow x - 2 = \ln 4 \\ &\Leftrightarrow x = 2 + \ln 4 \end{aligned}$$

إذن : $S = 2 + \ln 4$

$\triangleright$ لندرس الوضع النسبي للمنحنى C و المستقيم Δ

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{x-2} - e^{x-2} - 4$$

$$\text{نعلم أن } e^{x-2} > 0 \text{ إذن إشارة } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \text{ هي إشارة } -\frac{1}{2}e^{x-2} - 4$$

x	$-\infty$	$2+\ln 4$	$+\infty$
$(-1/2)(\text{Exp}(x-2)-4)$	+	0	-

✓ على المجال $-\infty, 2+\ln 4$:

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \geq 0$$

إذن المنحنى C يوجد فوق Δ

✓ و على المجال $2+\ln 4, +\infty$:

$$\text{لدينا : } f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right) \leq 0$$

إذن المنحنى C يوجد تحت Δ



(3)

✓ لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2} - e^{x-2} - 4}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{1}{2} \frac{e^{x-2}}{x} - e^{x-2} - 4 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2e^2} \frac{e^x}{x} = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \right) \text{ لأن :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} - 4 = +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{✓ بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

فإن المنحنى C يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب بجوار $+\infty$

(4) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 \right)' \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left(e^{x-2} e^{x-2} + e^{x-2} e^{x-2} - 4 \right)' \\ &= -1 - \frac{1}{2} \left(x-2 e^{x-2} e^{x-2} - 4 + e^{x-2} x-2 e^{x-2} \right) \\ &= -1 - \frac{1}{2} e^{x-2} e^{x-2} - 4 + e^{x-2}^2 \\ &= - \left(1 + \frac{1}{2} 2 e^{x-2}^2 - 4 e^{x-2} \right) \\ &= -1 + e^{x-2}^2 - 2 e^{x-2} \\ &= - e^{x-2} - 1^2 \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = - e^{x-2} - 1^2$

ب) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

(5) f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -e^{x-2} - 1 \\
 &= -2e^{x-2} - 1 \\
 &= -2e^{x-2} - 1 \\
 &= -2e^{x-2} - 1 \\
 &= 2e^{x-2} - e^{x-2} + 1
 \end{aligned}$$

إذن لكل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 2e^{x-2} - e^{x-2} + 1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 2 فإن $A(2, 2)$ نقطة انعطاف للمنحنى C ($f(2) = 2$)

(6)

- ✓ لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع و جداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$)
- ✓ بما أن $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ و $x = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ فإن f تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$
- ✓ ولدينا : $f(2 + \ln 3) = -2 + \ln 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2 + \ln 3 - 2}e^{2 + \ln 3 - 2} - 4 = 2 - \ln 3$

$$f(2 + \ln 3) > 0 \text{ إذن}$$

$$\text{و لدينا : } f(2 + \ln 4) = -2 + \ln 4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{2 + \ln 4 - 2}e^{2 + \ln 4 - 2} - 4 = \frac{1}{2} - \ln 4$$

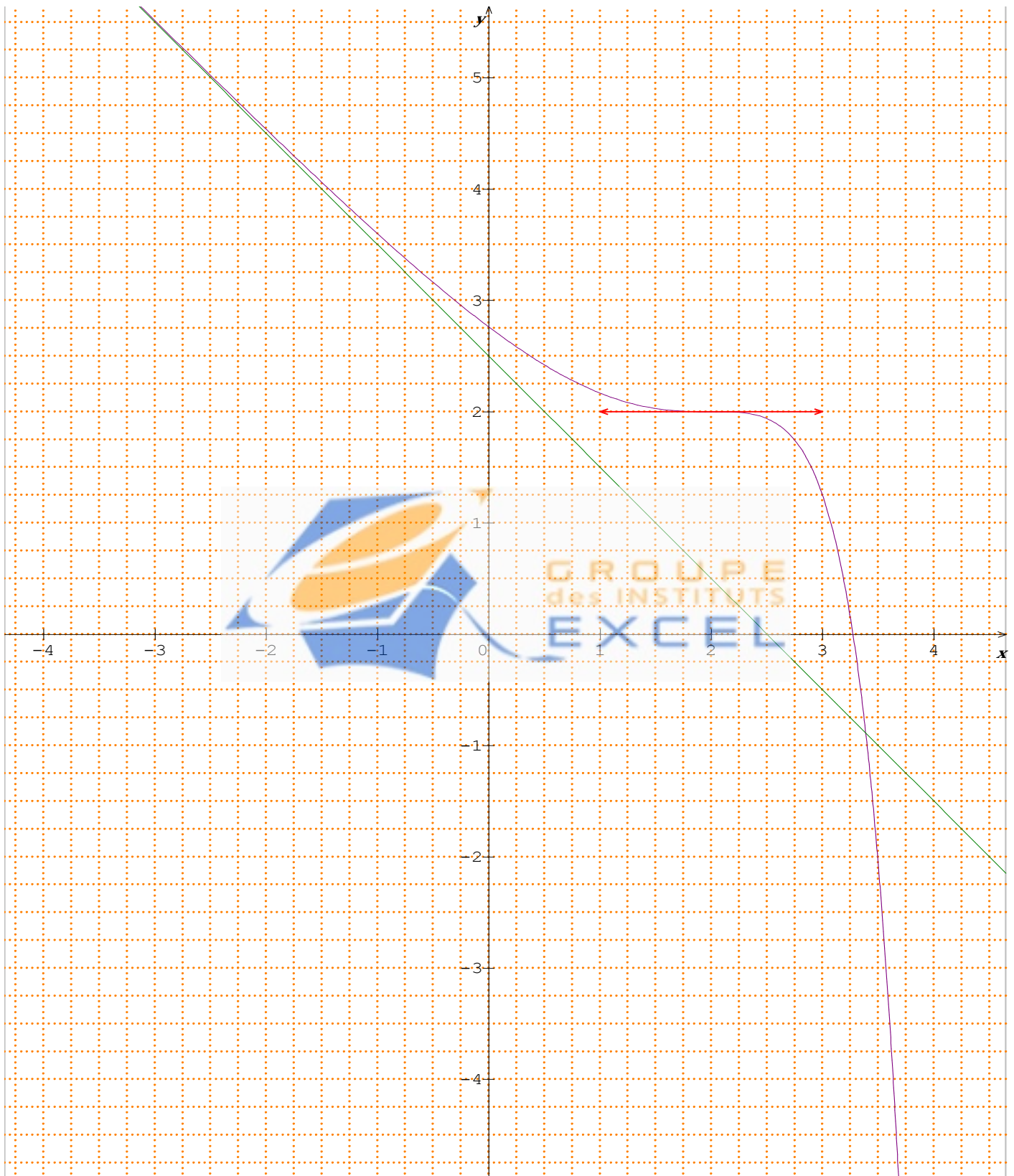
$$f(2 + \ln 4) < 0 \text{ إذن}$$

$$\text{و منه } f(2 + \ln 3) \times f(2 + \ln 4) < 0$$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث

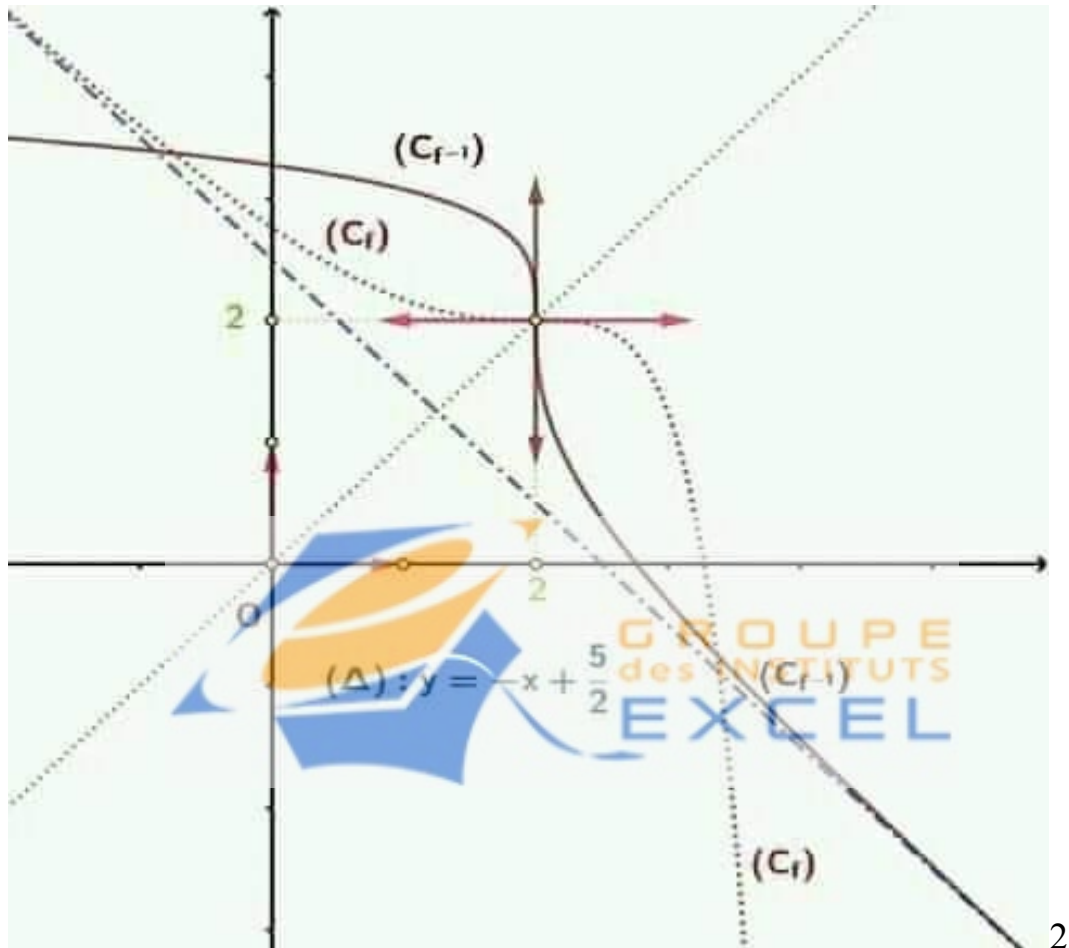
$$2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$$

(7)



(8) أ) بما أن f متصلة و تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$
حيث $J = f(\mathbb{R}) = f(-\infty, +\infty) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[= -\infty, +\infty = \mathbb{R}$

(ب)



$$f^{-1}'(2 - \ln 3) = f^{-1}'(f(2 + \ln 3)) = \frac{1}{f'(2 + \ln 3)} = \frac{1}{-4} \quad (\text{ج})$$