J783

امتحان شهادة البكالوريا

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

التمرين الأول :

1 - أ - لنبين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

لدينا الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

ولدينا $\vec{AB}(1, 1, -1)$ و $\vec{AC}(-1, 0, 1)$

إذن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$

ومنه $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1-0)\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$ 0.5

إذن : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

ب - معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A, B, C غير مستقيمية إذن نحدد مستوى وحيد متجهة الناظمية $(\vec{AB} \wedge \vec{AC})(1, 0, 1)$ إذن المعادلة الديكارتية 0.25

للمستوى (ABC) تكتب على شكل $x + z + d = 0$ $(d \in \mathbb{R})$

بما أن $A \in (ABC)$ فإن $0 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

إذن $x + z - 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2 - معادلة الفلكة (S)

لدينا الفلكة (S) مركزها $\Omega(1, 1, 2)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفضاء

$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{2}$ 0.5

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$

وبالتالي $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$ معادلة الفلكة (S)

3 - لنبين أن المستوى (ABC) مماس الفلكة (S) في النقطة A :

لنحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC) وشعاع الفلكة (S)

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|x_\Omega + 3z_\Omega - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 + 2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$ 0.5

لدينا $R = \sqrt{2}$ إذن $d(\Omega, (ABC)) = R$ ومنه المستوى (ABC) مماس الفلكة (S)

بتعويض مثلوث إحداثيات النقطة A في معادلة الفلكة (S) يكون لدينا

$(0-1)^2 + (1-1)^2 + (1-2)^2 = 1 + 1 = 2$

4- أ- تمثيل بارامتري لـ (Δ) .

لدينا المستقيم (Δ) يمر من النقطة C وعمودي على المستوى (ABC) ، إذن المتجهة الموجهة للمستقيم (Δ) هي المتجهة الناظمية على المستوى (ABC) ذو المعادلة $x+z-1=0$ إذن $\vec{n}(1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ومنه ،

التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ 0,25

ب) لنبين أن المستقيم (Δ) مماس الفلكة (S) في نقطة D .

لنقارن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) وشعاع الفلكة (S) .

لدينا $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$

لدينا $\vec{\Omega C}(-2,0,0)$

مع $\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end|\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end|\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end|\vec{k}$

$\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = (0-0)\vec{i} - (-2-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$ 0,5

إذن $\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = 2\vec{j}$

ومنه $\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\| = 2$ و $\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

إذن $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

مع $R=\sqrt{2}$ إذن $d(\Omega,(\Delta)) = R$

وبالتالي المستقيم (Δ) مماس الفلكة (S) في نقطة مثلوث إحداثياتها حل النظمة

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases} / t\in\mathbb{R}$$

بتعويض x و y و z على التوالي بـ $-1+t$ و 1 و $2+t$ في معادلة الفلكة (S) يكون

لدينا $(-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2 = 2$

إذن $t^2+t^2=2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1$

ومنه $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1=1 \\ z=2+1=3 \end{cases}$ إذن $D(0,1,3)$

ج- لنحسب الجداء السلمي $\vec{AC}.(\vec{i}+\vec{k})$.

لدينا $\vec{AC}(-1,0,1)$ و $(\vec{i}+\vec{k})(1,0,1)$

إذن $\vec{AC}.(\vec{i}+\vec{k}) = -1+0+1 = 0$

لدينا $\vec{A\Omega}(1,0,1)$

إذن $d(A,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{A\Omega}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ 0,5

ومنه $d(A,(\Delta)) = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$

التمرين الرابع :

1- أ- لنتحقق أن الدالة $x \to xe^x + x$ هي الدالة الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة $H : x \to xe^x$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كجداء دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن $H'(x) = (xe^x)'$

ومنه $H'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) = h(x)$

وبالتالي الدالة $x \to xe^x + x$ هي الدالة الأصلية للدالة h على $\mathbb{R}$

ب- لنحسب $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$.

لدينا $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)e^x\,dx$ 0,75

ولدينا الدالة الأصلية للدالة h هي الدالة $x \to xe^x$ على $\mathbb{R}$ إذن :

$I = [xe^x]_{-1}^{0}$

ومنه $I = 0 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

ب- لنحسب التكامل $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^x\,dx$

نضع $U'(x) = e^x$ و $V(x) = (x+1)^2$

إذن $U(x) = e^x$ و $V'(x) = 2(x+1)$

لدينا الدالتين U و V قابلتين للإشتقاق على $[-1,0]$

ولدينا الدالتين U' و V' الدالتين متصلتين على المجال $[-1,0]$

إذن حسب تقنية المكاملة بالأجزاء لدينا :

$J = [e^x(x+1)^2]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2e^x(x+1)\,dx$

إذن $J = [e^x(x+1)^2]_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} e^x(x+1)\,dx$ 0,75

ومنه $J = 1 - 0 - 2 \times \frac{1}{e} = \underline{1 - \frac{2}{e}}$

2- أ- لنحل المعادلة التفاضلية $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

لدينا المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي $r^2 - 2r + 1 = 0$ (1)

ولدينا مميز المعادلة (1) هو $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$

بما أن $\Delta = 0$ إذن المعادلة (1) تقبل حل وحيد هو $r = \frac{2}{2} = 1$ 0,5

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h : x \to (\beta x + \alpha)e^x$ ،

ب- لنبين أن الدالة h هي حل للمعادلة (E) .

لدينا $h(0) = 1$ إذن $h(0) = (\beta \times 0 + \alpha)e^0 = 1$

ومنه $\underline{\alpha = 1}$

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$ ، $h'(x) = \beta x + e^x(\beta x + 1)$ 0,5

مع $h'(0) = 2$ إذن $h'(0) = \beta e^0 + e^0(\beta \times 0 + 1) = 2$

ومنه $\beta + 1 = 2 \Rightarrow \underline{\beta = 1}$

ومنه $h(x) = (x+1)e^x$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

إذن الدالة h هي حل للمعادلة (E)

4- أ- تمثيل بارامتري لـ (Δ) :

لدينا المستقيم (Δ) يمر من النقطة C وعمودي على المستوى (ABC) ، إذن المتجهة الموجهة للمستقيم (Δ) هي المتجهة الناظمية على المستوى (ABC) ذو المعادلة $x+z-1=0$ ، إذن $\vec{n}(1,0,1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ) ومنه

التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) هو $\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases} / t\in\mathbb{R}$ 0,75

ب) لنبين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة D .

لنقارن مسافة النقطة Ω عن المستقيم (Δ) و شعاع الفلكة (S) :

لدينا $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$

لدينا $\vec{\Omega C}(-2,0,0)$

مع $\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = (0-0)\vec{i} - (-2-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$ 0,5

إذن $\vec{\Omega C}\wedge\vec{n} = 2\vec{j}$

ومنه $\|\vec{\Omega C}\wedge\vec{n}\| = 2$ و $\|\vec{n}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

إذن $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

مع $R=\sqrt{2}$ إذن $d(\Omega,(\Delta)) = R$

وبالتالي المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في نقطة مثلوث إحداثياتها حل للنظمة

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=1 \\ z=2+t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases} / t\in\mathbb{R}$$

بتعويض x و y و z على التوالي بـ $-1+t$ و 1 و $2+t$ في معادلة الفلكة (S) يكون

لدينا $(-1+t-1)^2+(1-1)^2+(2+t-2)^2 = 2$

إذن $t^2+t^2=2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=1$

ومنه $\begin{cases} x=-1+1=0 \\ y=1=1 \\ z=2+1=3 \end{cases}$ إذن $D(0,1,3)$

ج- لنحسب الجداء السلمي $\vec{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k})$:

لدينا $\vec{AC}(-1,0,1)$ و $(\vec{i}+\vec{k})(1,0,1)$

إذن $\vec{AC}\cdot(\vec{i}+\vec{k}) = -1+0+1 = 0$

لدينا $\vec{A\Omega}(1,0,1)$

إذن $d(A,(\Delta)) = \dfrac{\|\vec{A\Omega}\wedge\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$ 0,5

ومنه $d(A,(\Delta)) = \dfrac{0}{\sqrt{2}} = 0$

امتحان شهادة البكالوريا

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك : .....
مادة : .....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : .....

المسألة :

1- لنحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{x/2}-1\right)^2$ (*)

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{x/2} = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x/2}-1\right)^2 = +\infty$

مع : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ إذن : $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{x/2}-1\right)^2 = +\infty$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0,5

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{x/2}-1\right)^2$ (*)

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} e^{x/2} = 0$ و منه : $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x/2}-1\right)^2 = 1$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{x/2}-1\right)^2 = -\infty$ أي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2- لنحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(e^{x/2}-1\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x/2}-1\right)^2$ 0,5

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{x/2}-1\right)^2 = +\infty$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

التأويل : (C_f) يقبل فرع شلجمي موجه نحو محور (Oy) بجوار $+\infty$

3- أ- لنبين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\left(e^{x/2}-1\right)^2 - x\right)$ 0,5

إذن : $= \lim_{x\to-\infty} xe^x - 2xe^{x/2} + x - x$

و منه : $= \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - 2xe^{x/2}\right)$

لـ لنحسب $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{x/2}$

نضع : $X = \frac{x}{2}$ إذن : $x = 2X$ و $x\to-\infty \Leftrightarrow X\to-\infty$

إذن : $\lim_{X\to-\infty} 4Xe^X = 0$

و لدينا ($\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ إذن) $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{x/2} = 0$ إذن

وبالتالي المستقيم (D) ذي المعادلة $y=x$ مقارب المنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب - إشارة $f(x)-x$ على $\mathbb{R}$.

لدينا $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f(x)-x=x\left(e^{x/2}-1\right)^2-x$

$=xe^x-2xe^{x/2}$

إذن $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f(x)-x=x\left(e^x-2e^{x/2}\right)$

لندرس إشارة $\left(e^x-2e^{x/2}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا $e^x-2e^{x/2}=0 \Leftrightarrow e^x=2e^{x/2} \Leftrightarrow x=\ln 2-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x=\ln 4$

ولدينا $e^x-2e^{x/2}>0 \Leftrightarrow e^x>2e^{x/2} \Leftrightarrow x>\ln 2-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x>\ln 4$

ولدينا $e^x-2e^{x/2}<0 \Leftrightarrow e^x<2e^{x/2} \Leftrightarrow x<\ln 2-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x<\ln 4$

وبالتالي إشارة $x\left(e^x-2e^{x/2}\right)$ نلخصها في الجدول الآتي:

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x-2e^{x/2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق $y=x$	تقاطع (C_f) و $y=x$	(C_f) تحت $y=x$	تقاطع (C_f) و $y=x$	(C_f) فوق $y=x$	

4- أ - لنحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء ومجموع ومركب دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$f'(x)=\left(e^{x/2}-1\right)^2+x\left(2\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)\left(e^{x/2}-1\right)\right)$

إذن $=\left(e^{x/2}-1\right)^2+x\left(e^{x/2}\left(e^{x/2}-1\right)\right)$

ومنه $(\forall x\in\mathbb{R})$ $f'(x)=\left(e^{x/2}-1\right)^2+xe^{x/2}\left(e^{x/2}-1\right)$

ب - لنتحقق أن $x\left(e^{x/2}-1\right)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$e^{x/2}-1=0 \Leftrightarrow e^{x/2}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow x=0$

$e^{x/2}-1>0 \Leftrightarrow e^{x/2}>1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}>0 \Leftrightarrow x>0$

$e^{x/2}-1<0 \Leftrightarrow e^{x/2}<1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}<0 \Leftrightarrow x<0$

نلخص إشارة $x\left(e^{x/2}-1\right)$ في الجدول الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{x/2}-1$		$-$	0	$+$	
$x\left(e^{x/2}-1\right)$		$+$	0	$+$	

إذن $x\left(e^{x/2}-1\right)\geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ج - إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$.

لدينا $(\forall x\in\mathbb{R})$ $e^{x/2}>0$ إذن $(\forall x\in\mathbb{R})$ $xe^{x/2}\left(e^{x/2}-1\right)\geq 0$

مع $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^{x/2}-1\right)^2\geq 0$ وبالتالي $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^{x/2}-1\right)^2+xe^{x/2}\left(e^{x/2}-1\right)\geq 0$

ج - جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0,5

5 - أ - لنحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مرتين إذن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f''(x) = \left((e^{x/2}-1)^2 + x e^{x/2}(e^{x/2}-1)\right)'$$

$$f''(x) = 2\left(\frac{1}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1) + \left(e^{x/2} + \frac{x}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1) + \frac{x e^{x/2}}{2}e^{x/2}$$

$$= e^{x/2}(e^{x/2}-1) + \frac{1}{2}x e^{x/2}e^{x/2} + \left(e^{x/2} + \frac{x}{2}e^{x/2}\right)(e^{x/2}-1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(2(e^{x/2}-1) + x e^{x/2}\right) + \frac{1}{2}e^{x/2}(2+x)(e^{x/2}-1)$$

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(2e^{x/2} - 2 + x e^{x/2} + 2e^{x/2} - 2 + x e^{x/2} - x\right)$$

0,5

$$= \frac{1}{2}e^{x/2}\left(4e^{x/2} - 4 + 2x e^{x/2} - x\right)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}\left((2x+4)e^{x/2} - x - 4\right) = \frac{1}{2}e^{x/2}\,g(x)$$

ب - إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

من خلال منحنى الدالة g نلاحظ عند المجال $[\alpha, 0]$ منحنى الدالة g تحت محور الأفاصيل إذن $(\forall x \in [\alpha, 0]) \quad g(x) \leq 0$ 0,5

ولدينا عند المجالين $[0, +\infty[$ و $]-\infty, \alpha]$ منحنى الدالة g فوق محور الأفاصيل إذن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty, \alpha]$ و $[0, +\infty[$.

ج - تعيين المنحنى (C_f).

لدينا $\frac{1}{2}e^{x/2} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ولدينا لكل x من $[\alpha, 0]$ $g(x) \leq 0$ إذن $f''(x) \leq 0$ $(\forall x \in [\alpha, 0])$.

ولدينا لكل x من المجالين $]-\infty, \alpha]$ و $[0, +\infty[$ $g(x) \geq 0$ إذن $f''(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty, \alpha]$ و $[0, +\infty[$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
تقعر (C_f)		∪	نقطة انعطاف	∩	نقطة انعطاف	∪	

0,5

بما أن f'' تنعدم وتغير الإشارة في α و 0 إذن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education National
de l'Enseignement Préscolaire & de Sport

EXAMEN DU BACCALAUREAT

RESERVE A L'ACADEMIE

Série/Option : .....

Composition de : .....

Note définitive

...../20

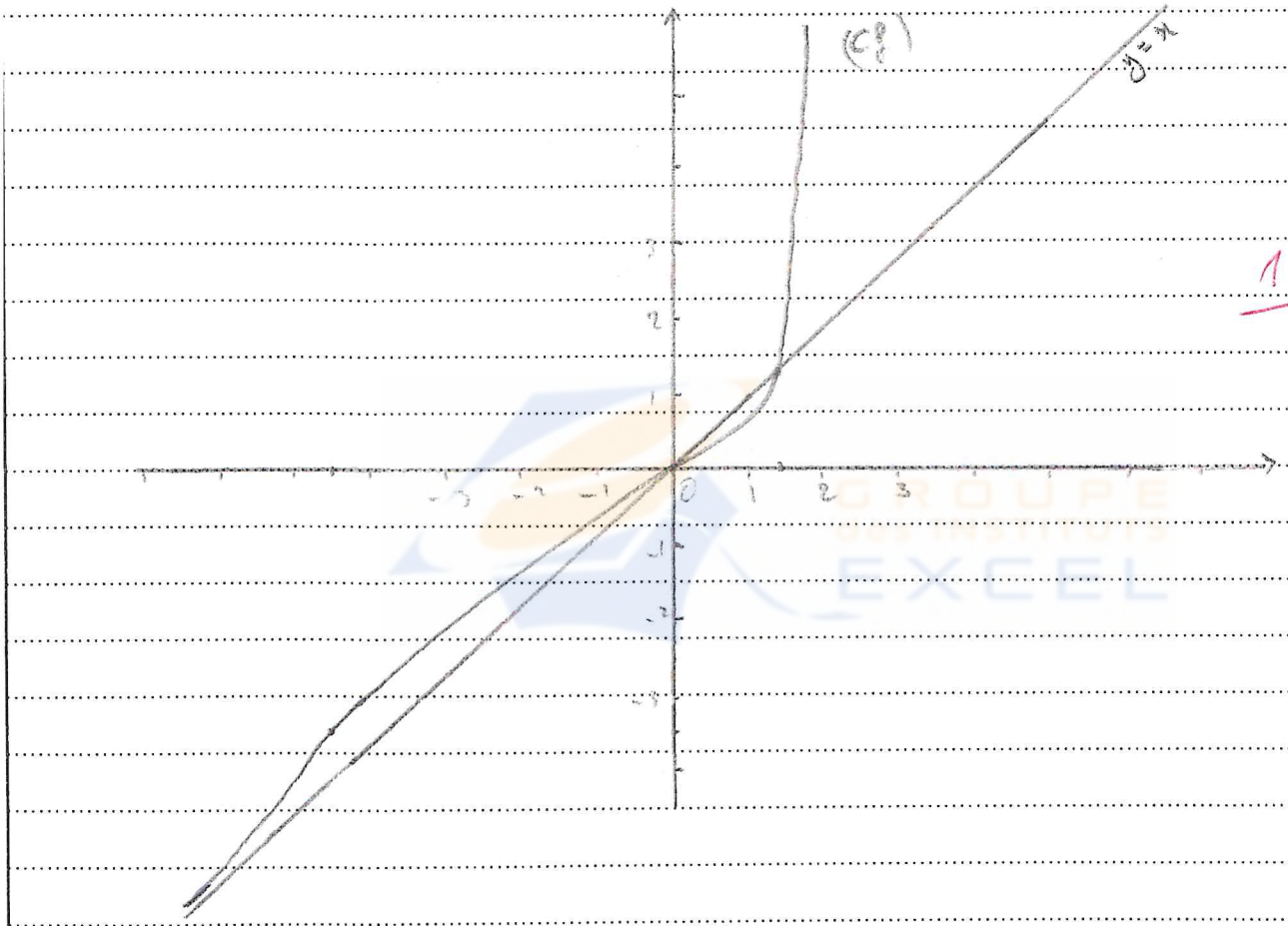
.....

Sur Vingt

Appréciation expliquant la note chiffrée :

.....

NOM DU CORRECTEUR ET SIGNATURE : .....



1

7- أ- بما أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ فإنها تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$ 0,5

ب- لنحسب $(f^{-1})'(\ln 4)$:

لدينا $f(\ln 4) = \ln 4$ إذن $f^{-1}(\ln 4) = \ln 4$

ولدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\ln 4$ ينتمي إليه

$f'(\ln 4) = 1 + \ln 16$

إذن $f'(\ln 4) \neq 0$ و منه الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في $\ln 4$

$(f^{-1})'(\ln 4) = \frac{1}{f'(\ln 4)} = \frac{1}{1+\ln 16}$ 0,25

النقطة النهائية
/20
على عشرون

الشعبة / المسلك : .....
مادة : .....

التقدير المفسر للنقطة

خاص بالأكاديمية

إسم المصحح وتوقيعه (ها) : .....

8 - أ - من أجل $n=0$ لدينا $U_0=1$ إذن $0<1<\ln 4$ ومنه
الخاصية صحيحة من أجل $n=0$
ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نفترض أن $0<U_n<\ln 4$ ، لنبين أن $0<U_{n+1}<\ln 4$
لدينا حسب نتيجة السؤال (4 - ب) الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$
ولدينا حسب افتراض التجرع $0<U_n<\ln 4$
إذن $f(0)<f(U_n)<f(\ln 4)$
$0<U_{n+1}<\ln 4$
ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ ، إذن حسب مبدأ التجرع $0<U_n<\ln 4$
لكل n من $\mathbb{N}$
ج - رتابة (U_n) :
لدينا حسب نتيجة السؤال (3 - ب) $f(x)\leq x$ لكل x من $[0,\ln 4]$
ولدينا $U_n\in[0,\ln 4]$
من أجل $U_n=x$ لدينا $f(U_n)\leq U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
إذن $U_{n+1}\leq U_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
ومنه المتتالية (U_n) تناقصية.
ج - بما أن (U_n) تناقصية ومصغورة إذن فهي متقاربة.
د - نهاية (U_n) :
لدينا الدالة f متصلة على $[0,\ln 4]$.
لدينا $U_0\in[0,\ln 4]$ و $f(U_n)=U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$
ولدينا $f[0,\ln 4]\subset[0,\ln 4]$ إذ $f[0,\ln 4]=[0,\ln 4]$
ولدينا (U_n) متقاربة
إذن نهاية المتتالية (U_n) حل للمعادلة $f(x)=x$ على $[0,\ln 4]$
لدينا حسب منحنى الدالة f (السؤال 6) (C_f) يقطع المستقيم $y=x$ في نقطتين أفصولهما على التوالي 0 و $\ln 4$
إذن حلول المعادلة $f(x)=x$ على $[0,\ln 4]$ هي
ولدينا $U_0=1$ و (U_n) تناقصية إذن
$\lim U_n=0$

التمرين الثاني
1 - لحق النقطة D :
لدينا المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

ولدينا النقطة D صورة النقطة B بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{OA}$ ، إذن:

$$\vec{BD} = \vec{OA}$$

ملحقة المتجهة $\vec{OA}$ هو $-1-i\sqrt{3}$

وملحقة المتجهة $\vec{BD}$ هو $d+1-i\sqrt{3}$

إذن: $d+1-i\sqrt{3} = -1-i\sqrt{3}$

ومنه: $\boxed{d=-2}$

3 - ملحقة النقطة C:

لدينا النقطة C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه D وزاويته $\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ إذن:

$$c-d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(c-1)$$

مع: $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن: $c = e^{i\frac{2\pi}{3}}c - e^{i\frac{2\pi}{3}}b + b$

$$c\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+i\sqrt{3}) + i\sqrt{3} - 1$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) + i\sqrt{3} - 1$$

$$c\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -(-1-i\sqrt{3}) + i\sqrt{3} - 1$$

$$= 1 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3}$$

$$c\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2i\sqrt{3}$$

$$c = 2i\sqrt{3}\left(\frac{2}{3-\sqrt{3}i}\right) =$$

4 - ملحقة النقطة C:

لدينا C صورة B بالدوران R الذي مركزه D وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ إذن:

$$c-d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)$$

$$c = e^{i\frac{2\pi}{3}}b - de^{i2\pi/3} + d$$

مع: $e^{i2\pi/3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

إذن: $c = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-1+i\sqrt{3}) + 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{3}{2} + i\sqrt{3} - 1 - 2$$

$$\boxed{c = -4}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{9+3}$$

$$= \frac{9+3i\sqrt{3}+3i\sqrt{3}-3}{12}$$

لدينا $\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

إذن $\frac{b-c}{a-c} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{b-c}{a-c} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

ب- $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$

$= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ حسب موافر

$\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن 0.5

ج- $R(B) = C \iff c - d = e^{i\frac{2\pi}{3}}(b-d)$ مع

إذن $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{c-d}{b-d}$

إذن $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4- أ- لدينا

$|z+2| = |z-(-2)|$

$|z+2| = |z-d|$ 0.25

$= DM$

بما أن D هي مركز الدائرة (Γ) و $M \in (\Gamma)$ فإن $DM = 2$

أي $|z+2| = 2$

ب- لدينا $z\bar{z} = |z|^2 = 16$ إذن $\bar{z} = \frac{16}{z}$

ومنه $z + \bar{z} = z + \frac{16}{z}$ 0.5

$= z + \frac{16}{4}$

إذن $z + \bar{z} = -4 + 4 = -8$