التمرين 1 : $A(0,1,4)$; $B(2,1,2)$; $C(2,5,0)$

$\Omega(3,4,4)$

1) أ) أبين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

لدينا $\vec{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 2 & 2 \\ \vec{j} & 0 & 4 \\ \vec{k} & -2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (0-(-8))\vec{i} - (-8+4)\vec{j} + (8-0)\vec{k}$$

$$= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$= 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$$

ب: مساحة ABC وحساب المسافة $d(B,(AC))$

$$* \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+8^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{144} = \frac{12}{2} = 6$$

$$S_{ABC} = 6$$

$$* \quad d(B,(AC)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AC}\|} = \frac{12}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{12}{6} = 2$$

$$d(B,(AC)) = 2$$

2) أ. نحقق أن $\vec{D\Omega} = \frac{1}{4}(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$.

D هو منتصف [AC] إذن $D(1,3,2)$

و منه $\vec{D\Omega}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

أي :

$$\vec{D\Omega} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$= \frac{1}{4}(8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k})$$
$$= \frac{1}{4}(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$$

ب: استنتج ان : $d(\Omega, (ABC)) = 3$

لدينا $\vec{D\Omega} = \frac{1}{4}(\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ اذن $\vec{D\Omega}$ و $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$

مستقيميان ومنه المستقيم $(D\Omega)$ عمودي على (ABC)

D هو المسقط العمودي لـ Ω على (ABC)

اذن $d(\Omega, (ABC)) = D\Omega = \frac{1}{4}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

$$= \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$$

3) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

أ) حدد مركز وشعاع (S) :

لدينا

$(S): (x^2 - 6x) + (y^2 - 8y) + (z^2 - 8z) + 32 = 0$

$(S): (x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + (z-4)^2 - 16 + 32 = 0$

$(S): (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 9 = 3^2$

إذن مركز (S) هو $\Omega(3,4,4)$ وشعاعها $R = 3$

ب: بين ان (ABC) مماس لـ (S) وحدد نقطة التماس

لدينا $d(\Omega, (ABC)) = 3 = R$ إذن (ABC) مماس لـ (S)

في نقطة T تقاطع (ABC) و المستقيم (ΩT)

اي المسقط العمودي لـ Ω على (ABC) وهو D

نقطة التماس هي D اي $D(1,3,2)$

4) تحديد معادلة ديكارتية لكل من (Q_1) و (Q_2) :

ليكن (Q) مستوى يوازي (ABC) ويقطع (S) وفق دائرة شعاعها $\sqrt{5}$ ومركزها H

لدينا $\Omega H^2 + \sqrt{5}^2 = R^2$ اي $\Omega H^2 = 9-5=4$

اي $\Omega H = 2$

اي $d(\Omega,(Q)) = 2$

بما أن (Q) و (ABC) لهما نفس الشعاع الناظمي فإن $(ABC) // (Q)$

الشعاع الناظمي $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ لـ (Q) ومنه معادلة (Q) هي على شكل

$(Q): 2x+y+2z+d=0$

$d(\Omega,(Q)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|6+4+8+d|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Leftrightarrow |18+d| = 6$

$\Leftrightarrow 18+d=6$ أو $18+d=-6$

$\Leftrightarrow d=-12$ أو $d=-24$

وبالتالي:

$(Q_1): 2x+y+2z-12=0$

$(Q_2): 2x+y+2z-24=0$

التمرين 2 : $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}+i$, $c=\bar{b}$, $d=2i$

1) اكتب a على الشكل المثلثي:

$$|a| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 2$$

$$a = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2أ. تحقق أن: $b-d=c$

$$b-d = 1+\sqrt{2}+i-2i = 1+\sqrt{2}-i = \bar{b} = c$$

إذن $b-d=c$

ب) بين أن $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$

$$(\sqrt{2}+1)(b-a) = (\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$= (\sqrt{2}+1)\left[1+i(1-\sqrt{2})\right]$$
$$= 1+\sqrt{2}+i(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$$
$$= 1+\sqrt{2}+i(1-2)$$
$$= 1+\sqrt{2}-i$$
$$= c$$
$$= b-d \quad \text{(سؤال 2أ)}$$

* لدينا: $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$ أي $\frac{b-d}{b-a}=(\sqrt{2}+1)$

إذن النقط A , B , D مستقيمية $\frac{b-d}{b-a}\in\mathbb{R}$

3أ. تحقق أن $ac=2b$.

$$ac = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-i)$$
$$= \sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2}$$
$$= 2\sqrt{2}+2+2i = 2(\sqrt{2}+1+i) = 2b$$

إذن : $ac = 2b$

ب) استنتج أن $2\arg b \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

لدينا: $ac = 2b$ ، $c = \bar{b}$ إذن:

$$ac = a\bar{b} = 2b$$
$$a\bar{b} = 2b \Rightarrow \arg a + \arg \bar{b} \equiv \arg 2 + \arg b\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg a - \arg b \equiv 0 + \arg b\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg a = \arg b + \arg b\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg a \equiv 2\arg b\ [2\pi]$$

وبالتالي $2\arg b \equiv \arg a\ [2\pi]$

ونعلم أن $\arg a \equiv \pi/4\ [2\pi]$ إذن:

$$2\arg b \equiv \pi/4\ [2\pi]$$

4) أ: بين أن $z' = \frac{1}{2}az$:

لدينا:

$$z' - o = e^{i\pi/4}(z-o)$$
$$= (\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)z$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}_{a}z = \frac{1}{2}a.z$$

4ب: استنتج أن $R(C)=B$ و أن $R(A)=D$

نعلم ان $z' = \frac{1}{2}az$

* لحق صورة النقطة C ذات اللاحق c هو c'

$c' = \frac{1}{2}ac = \frac{1}{2}(2b) = b$ $\left(ac = 2bi \neq 13\right)$

اذن: $R(C)=B$

* لحق صورة A هي $a' = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2}(2-2+4i)$

$= 2i = d$

وبالتالي $R(A)=D$

ج: بين أن: $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$ ، واستنتج قياس $(\vec{AC}, \vec{AB})$ الزاوية

$\frac{b-a}{c-a} = \frac{1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-i-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \frac{1+i-i\sqrt{2}}{1-i-i\sqrt{2}}$

$= \frac{1+i(1-\sqrt{2})}{1-i(1+\sqrt{2})} = \frac{[1+i(1-\sqrt{2})][1+i(1+\sqrt{2})]}{1+(1+\sqrt{2})^2}$

$= \frac{1+i+i\sqrt{2}+i-i\sqrt{2}+1}{4+2\sqrt{2}} = \frac{2+2i}{4+2\sqrt{2}}$

$= \frac{1+i}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1+i)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}\underbrace{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}_{1}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)\sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot \sqrt{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot a$$

$$(\vec{AC}, \vec{AB}) = \arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) + 2k\pi$$

$$= \arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot a\right) + 2k\pi$$

$$= \arg\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) + \arg(a) + 2k\pi$$

$$= 0 + \arg a + 2k\pi \quad \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} > 0 \text{ ; } \mathbb{R}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$(\vec{AC}, \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} \ [2\pi]$$

GROUPE des INSTITUTS EXCEL

تمرين 3 :

2	1	1	1	0	0
u_1					

2	2	1	1	1
u_2				

1- أ

$$p(A) = p((1,1);(1,\bar{1})) = \frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ب للحصول على ab=2 يمكن سحب 1 من u_1 ثم 2 من u_2

او سحب 2 من u_1 ثم 1 من u_2

$$p(B) = \frac{3}{6}\times\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

2) حساب $p(A|B)$

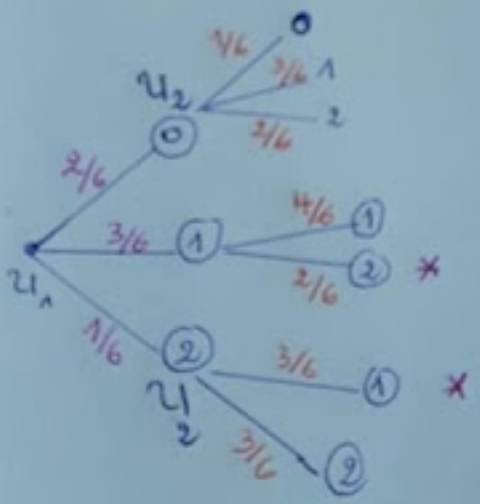
$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

$A\cap B$ "سحب 1 من u_1 ثم 2 من u_2"

$$p(A\cap B) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{6}{36}$$

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{6/36}{9/36} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

GROUPE des INSTITUTS EXCEL



③ أ- نبين أن $p(X=0)=\frac{1}{3}$

نجب سحب (u_1 من 0 و u_2 من 0) أو (u_1 من 0 و u_2 من 1)

أو (u_1 من 0 و u_2 من 2)

$$p(X=0)=\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2+6+4}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

ب: قانون احتمال X

$(X=1)$ "سحب 1 من u_1 ثم u_2 من 1"

$$p(X=1)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{12}{36}$$

$(X=4)$ "سحب u_1 من 2 و u_2 من 2"

$$p(X=4)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{3}{36}$$

$p(X=2)=p(B)=\frac{9}{36}$ ، $p(X=0)=\frac{12}{36}$ ولدينا

x_i	0	1	2	4
$p(X=x_i)$	$12/36$	$12/36$	$9/36$	$3/36$

ج: M "سحب (2 من u_1 و 2 من u_2) أو (1 من u_1 و 2 من u_2)

أو (1 من u_1 و 2 من u_2)"

$$p(M)=p((2,2)\text{ أو }(2,1)\text{ أو }(1,2))$$
$$=\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\right)+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{36}$$

$$p(N)=p(X=1)=\frac{12}{36}$$

إذن $p(M)=p(N)$

GROUPE DES INSTITUTS EXCEL

المسألة: $f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1-\ln x)^2$

1- أ

$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{2x - 2 + x(1 - 2\ln x + \ln^2 x)}{x}$

$= \frac{2x - 2 + x - 2x\ln x + x\ln^2 x}{x}$

$= \frac{3x - 2 - 2x\ln x + x\ln^2 x}{x}$

ب- نضع $\sqrt{x} = t$ اذا $x = t^2$

$* \lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^2 = \lim_{t \to 0^+} t^2 (\ln t^2)^2$

$= \lim_{t \to 0^+} t^2 (2\ln t)^2 = \lim_{t \to 0^+} 4t^2 \ln^2 t = \lim_{t \to 0^+} 4(t\ln t)^2$

$= 4 \times 0 = 0$

$* \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(\ln(t^2))^2}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{(2\ln t)^2}{t^2}$

$= \lim_{t \to +\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 4 \times 0 = 0$

ج:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x - 2 - 2x\ln x + x\ln^2 x}{x}$

$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}(3x - 2 - 2x\ln x + x\ln^2 x)$

$= +\infty (0 - 2 - 0 + 0) = -\infty$

الاستنتاج: (C_f) يقارب $(Y'Y)$ مقارب $X = 0$

د:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (3 - \frac{2}{x} - 2\ln x + \ln^2 x)$

$= \lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{2}{x} - \ln x(2 - \ln x) = 3 - 0 - \infty(-\infty)$

$= +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2-2x\ln x+x\ln^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

$$=\quad 0-0-0+0$$

$$=0$$

(Cf) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الاراتيب

بجوار $+\infty$

2) بينا ان: $x>0$ $f'(x)=\dfrac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$

$\forall x>0$ $f'(x)=\left(2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2\right)'$

$$=\frac{2}{x^2}+2(1-\ln x)\cdot(1-\ln x)'$$

$$=\frac{2}{x^2}+2(1-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}(1-\ln x)$$

$$=\frac{2-2x(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2-2x+2x\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$$

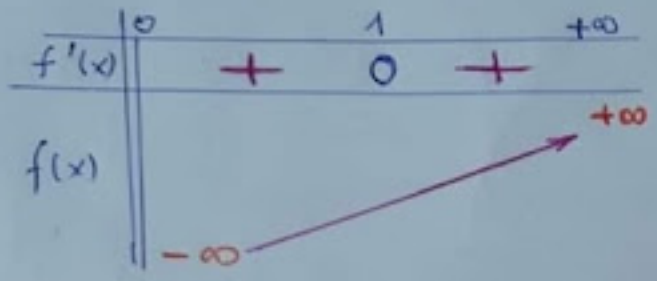
3) أ- الحدد 0 قيمة دنيا لـ f' على $]0,\beta]$ إذن: $]0,\beta]$ من x لكل $f'(x)\geqslant 0$

ولدينا $f'([\beta,+\infty[)=[0,f'(\beta)]$ إذن: $\forall x\in[\beta,+\infty[, f'(x)\geqslant 0$

وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\ f'(x)\geqslant 0$

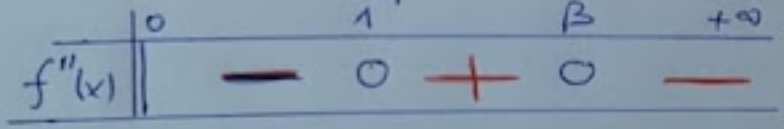
لدينا $f'(x) \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$

f' تنعدم في نقطة معزولة وهي 1 إذن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$



ب: الدالة f' تناقصية على كل من المجالين $]0,1]$ و $[\beta,+\infty[$ إذن f'' سالبة على كل من هذين المجالين.

f' تزايدية على المجال $[1,\beta]$ إذن f'' موجبة على المجال $[1,\beta]$.



$f''(\beta) = 0$ إذن $f'(\beta)$ هي قيمة قصوى لـ f'

$f''(1) = 0$ إذن f' قيمة دنيا لـ f'

ج: من خلال جدول اشارات f'' فإن

(C_f) مقعر على كل من المجالين $]0,1]$ و $[\beta,+\infty[$

(C_f) محدب على المجال $[1,\beta]$

"f تتعدم في كل من 1 و β إذن (Cf) يقبل نقطتي انعطاف افصولهما على التوالي 1 و β

4) أ- منحنى الدالة g يوجد تحت محور الافاصيل

* في كل من المجالين]0, α[و]1, +∞[

إذن: g(x) سالبة في كل من المجالين]0, α[و]1, +∞[

* منحنى الدالة g يوجد فوق محور الافاصيل في المجال]α, 1[إذن g(x) موجبة في المجال]α, 1[

x	0		α		1		+∞
g(x)	‖	−	0	+	0	−	

ب:

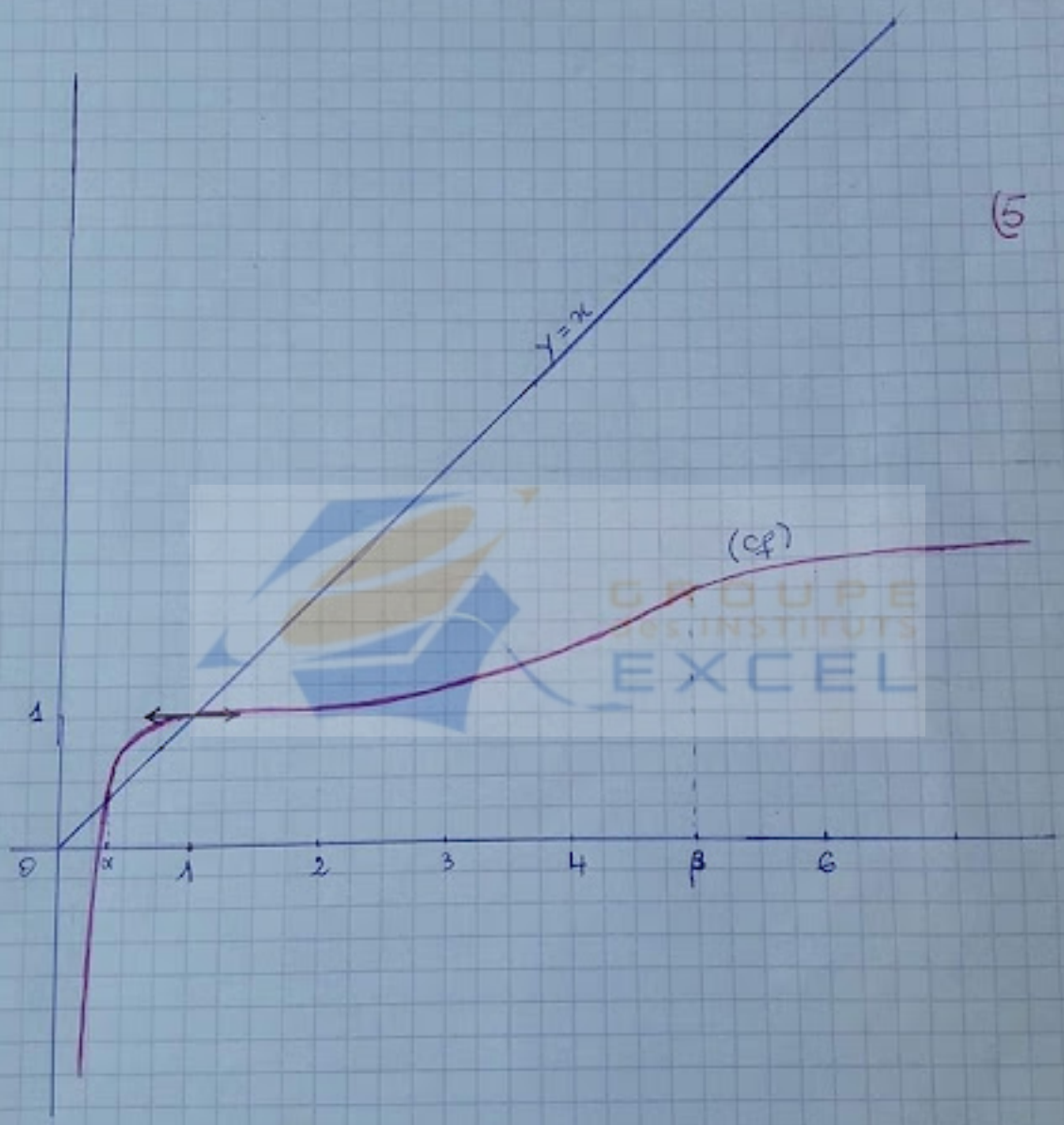
* لكل x من]0, α[لدينا g(x)<0 اي f(x)<x ومنه (Cf) يوجد تحت (Δ) في المجال]0, α[

* لكل x من]1, +∞[لدينا g(x)<0 اي f(x)<x ومنه (Cf) يوجد تحت (Δ) في المجال]1, +∞[

* لكل x من]α, 1[لدينا g(x)>0 اي f(x)>x ومنه (Cf) فوق (Δ) في المجال]α, 1[

GROUPE des INSTITUTS EXCELL

(5)



GROUPE INSTITUTS EXCEL

16- لدينا $H: x \to 2x - x\ln x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ ولدينا $[\alpha, 1]$ محتوى في $\mathbb{R}^{+*}$

$\forall x \in [\alpha, 1]$

$$H'(x) = (2x)' - (x\ln x)' = 2 - (x\ln x + x' \cdot \ln x)$$
$$= 2 - (x \cdot \frac{1}{x} + \ln x)$$
$$= 2 - 1 - \ln x$$
$$= 1 - \ln x$$

إذن الدالة $H: x \to 2x - x\ln x$ هي دالة أصلية للدالة $h: x \to 1 - \ln x$ على $[\alpha, 1]$

ب- حساب التكامل $\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx$ بالمكاملة بالأجزاء:

نضع: $u(x) = (1-\ln x)^2 \Rightarrow u'(x) = -\frac{2}{x}(1-\ln x)$

$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$

$$\int_\alpha^1 (1-\ln x)^2 dx = [x(1-\ln x)^2]_\alpha^1 + 2\int_\alpha^1 (1-\ln x)\, dx$$
$$= [x(1-\ln x)^2]_\alpha^1 + 2[2x - x\ln x]_\alpha^1$$
$$= 1 - \alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2[2 - (2\alpha - \alpha\ln\alpha)]$$
$$= 1 - \alpha(1 - 2\ln\alpha + \ln^2\alpha) + 4 - 4\alpha + 2\alpha\ln\alpha$$
$$= 1 - \alpha + 2\alpha\ln\alpha - \alpha\ln^2\alpha + 4 - 4\alpha + 2\alpha\ln\alpha$$
$$= 5 - 5\alpha + 4\alpha\ln\alpha - \alpha\ln^2\alpha$$
$$= 5(1-\alpha) + \alpha(4 - \ln\alpha)\ln\alpha$$

GROUPE DES INSTITUTS EXCELLENCE

ج: حساب S بدلالة α مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=\alpha$

$$S = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^1 2 - \frac{2}{x} + (1-\ln x)^2\,dx$$

$$= \int_\alpha^1 \left(2 - \frac{2}{x}\right)dx + \int_\alpha^1 (1-\ln x)^2\,dx$$

$$= [2x - 2\ln x]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 (1-\ln x)^2\,dx$$

$$= 2 - (2\alpha - 2\ln\alpha) + 5(1-\alpha) + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

$$= 2 - 2\alpha + 2\ln\alpha + 5 - 5\alpha + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

$$= 7 - 7\alpha + 2\ln\alpha + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

$$S = \left(7 - 7\alpha + 2\ln\alpha + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha\right)\cdot ua.$$

7) $u_{n+1} = f(u_n)$; $u_0 \in]\alpha, 1[$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ. لنبين بالتراجع أن $\alpha < u_n < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

* لدينا $u_0 \in]\alpha, 1[$ أي $\alpha < u_0 < 1$

العلاقة محققة من أجل $n=0$

* نفترض أن $\alpha < u_n < 1$ إلى حدود n ونبين أن $\alpha < u_{n+1} < 1$

نعلم أن $\alpha < u_n < 1$ من خلال افتراض التراجع و f تزايدية قطعا على $[\alpha, 1]$ إذن:

$f(\alpha) < f(u_n) < f(1)$ أي $\alpha < u_{n+1} < 1$ لأن $f(1) = 1$

و $f(\alpha) = \alpha$ وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha < u_n < 1$

ب: (C_f) يوجد فوق (Δ) في المجال $[\alpha, 1]$

أي أن: $f(x) \geq x$ لكل x من $[\alpha, 1]$

ونعلم أن $u_n \in [\alpha, 1]$ إذن $f(u_n) \geq u_n$

أي $u_{n+1} \geq u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن (u_n) تزايدية.

ج: (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 1 إذن فهي متقاربة ونهايتها l حل للمعادلة $f(x) = x$

$f(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$ أو $x = 1$

(u_n) تزايدية إذن $u_n \geq u_0$ لكل n من $\mathbb{N}$

إذن $l \geq u_0$ أو $\lim u_n \geq u_0$ إذن $l = 1$

$$\lim u_n = 1$$

EXCEL des INSTITUTS