التمرين الأول (3 نقط):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$ لكل n من $\mathbb{N}$

0.5 1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

0.5 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) نضع $v_n = \frac{3}{1+u_n}$ ، لكل n من $\mathbb{N}$

0.5 أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 ثم حدد حدها الأول.

0.5 ب) عبر عن u_n بدلالة n ، لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

4) نضع $w_n = e^{3-v_n}$ و $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

0.5 أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية وحدد أساسها وحدها الأول.

0.5 ب) احسب نهاية المجموع S_n

التمرين الثاني (3 نقط):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,5)$ و $C(4,-5,7)$ و $\Omega(1,-1,0)$. نضع $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

لتكن (S) الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها $R = 3$

0.5 1) أ) بين أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ واستنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

0.25 ب) تحقق أن $x + 2y + 2z - 8 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

0.5 ج) بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A

2) ليكن (P) المستوى الذي معادلته الديكارتية $3x + 4y + z + 1 = 0$ و (Δ) المستقيم المار من النقطة A والعمودي على المستوى (P)

0.5 أ) بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوى (P) في النقطة $H\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$

0.5 ب) حدد إحداثيات النقطة D بحيث تكون النقطة H منتصف القطعة $[AD]$

3) ليكن (Q) المستوى المار من النقطة D والمتجهة $\overrightarrow{\Omega D}$ منظمية عليه.

0.25 أ) بين أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) في D

0.5 ب) بين أن المستويين (Q) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (BC)

المسألة(8 نقط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=(x-1)^2e^{x(2-x)} & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=1+(x-2)^2\ln(x-2) & ; \quad x>2 \end{cases}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)

0.5 | 1) بين أن الدالة f متصلة في النقطة 2

0.25 | 2) أ) تحقق أن لكل $x<2$ و $x\neq 0$ ، $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=xe^{x(2-x)}-x.\frac{e^{x(2-x)}-1}{x(2-x)}$

0.5 | ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 2

0.75 | ج) بين أن f قابلة للاشتقاق في 2 وأن $f'(2)=0$ ثم أول النتيجة هندسيا

0.25 | 3) أ) تحقق أن لكل $x\le 2$ ، $f(x)=x(x-2)e^{x(2-x)}+e^{x(2-x)}$

0.5 | ب) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا

0.75 | ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

0.5 | 4) أ) بين أن لكل $x<2$ ، $f'(x)=2x(x-1)(2-x)e^{x(2-x)}$

0.5 | ب) بين أن لكل $x>2$ ، $f'(x)=(x-2)(1+2\ln(x-2))$

0.5 | ج) حل في المجال $]2,+\infty[$ المتراجحة $1+2\ln(x-2)\le 0$

0.75 | د) أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

1 | 5) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نعطي: $f(3)=1$ و $2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ و $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)

6) ليكن $\lambda\in]2,3[$

0.5 | أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن $\int_\lambda^3 (x-2)^2\ln(x-2)dx=-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$

0.5 | ب) استنتج بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ لحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات ذات المعادلات: $y=1$ و $x=\lambda$ و $x=3$

0.25 | ج) احسب $\lim\limits_{\lambda\to 2^+} A(\lambda)$

التمرين الثالث (3 نقط):

1) نعتبر العدد العقدي $a=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

0.25 أ) بين أن $a=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

0.25 ب) استنتج أن a^{2022} عدد حقيقي

0.5 2) في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $\overline{a}$

حدد قياسا لزاوية الدوران R الذي مركزه O ويحول B إلى A

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_\alpha): z^2-\sqrt{3}z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي غير منعدم .

نفترض أن المعادلة (E_α) تقبل حلين عقديين مترافقين غير حقيقيين z و $\overline{z}$

لتكن النقط $M(z)$ و $N(\overline{z})$ و $P(\sqrt{3})$ من المستوى العقدي.

بدون حل المعادلة (E_α):

0.5 أ) علل أن $\alpha>\frac{3}{4}$ و أن $\alpha=z\overline{z}$

0.5 ب) بين أن $|z|=|z-\sqrt{3}|$

0.5 ج) استنتج أن النقطتين M و N تنتميان الى المستقيم (Δ) واسط القطعة $[OP]$

0.5 د) حدد قيمة α التي من أجلها $|z-\sqrt{3}|=\sqrt{3}$ واستنتج في هذه الحالة، نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) والدائرة التي مركزها P وشعاعها $\sqrt{3}$.

التمرين الرابع (3 نقط):

يحتوي صندوق على أربع كرات بيضاء وكرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1) نسحب عشوائيا وتآنيا كرتين من الصندوق.

0.5 أ) أحسب احتمال الحدث A : " سحب كرة سوداء واحدة على الأقل "

0.5 ب) نعتبر الحدث B : " الحصول على كرتين من نفس اللون " . بين أن $p(B)=\frac{7}{15}$

0.5 ج) نكرر هذه التجربة خمس مرات مع إعادة الكرتين الى الصندوق بعد كل سحبة.

ما هو احتمال تحقق الحدث B ثلاث مرات بالضبط؟

2) في هذا السؤال، نسحب كرات من الصندوق، واحدة تلو الأخرى وبدون إحلال، ونتوقف عن السحب عند الحصول على كرة بيضاء لأول مرة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي تم إجراؤها في هذه التجربة.

0.25 أ) علل أن القيم التي يأخذها X هي : 1 و 2 و 3

0.25 ب) بين أن $p(X=2)=\frac{4}{\ldots}$