Corrigé d'examen National
2BacSM Année 2025

Exercice 1 : Chimie (7 points)

Partie 1 : Electrolyse d'une solution de chlorure d'or

1. Choix de la proposition juste (0,5 pt)

Proposition correcte :

- **a)** Faux : L'électrolyse est une transformation <u>forcée</u> (non spontanée)
- **b)** Faux : Le courant circule à l'extérieur <u>de la cathode vers l'anode</u>
- **c)** Vrai : E_1 est l'anode (entrée du courant), donc dépôt sur E_2 (cathode)
- **d)** Faux : Q_t n'atteint pas K car la réaction est forcée

2. Équation à la cathode (0,5 pt)

Réaction de réduction :

$$\boxed{\mathrm{Au}^{p+} + p\,e^- \rightarrow \mathrm{Au}}$$

3. Expression de la masse déposée (0,5 pt)

Charge totale : $Q = I \cdot t$

Moles d'électrons : $n_e = \frac{Q}{F} = \frac{I \cdot t}{F}$

Moles d'or : $n_{\mathrm{Au}} = \frac{n_e}{p}$

Masse : $m = n_{\mathrm{Au}} \cdot M(\mathrm{Au})$

$$\boxed{m = \frac{M(\mathrm{Au}) \cdot I \cdot t}{p \cdot F}}$$

4 Détermination de p (0,75 pt)

Application numérique :

$$0{,}4 \times 10^{-3} = \frac{197 \times 0{,}40 \times 1{,}5}{p \times 9{,}65 \times 10^4}$$

$$p = \frac{197 \times 0{,}60}{0{,}4 \times 10^{-3} \times 9{,}65 \times 10^4} = \frac{118{,}2}{38{,}6} \approx 3$$

- Valeur de p : 3
- Formule de l'ion : Au^{3+}

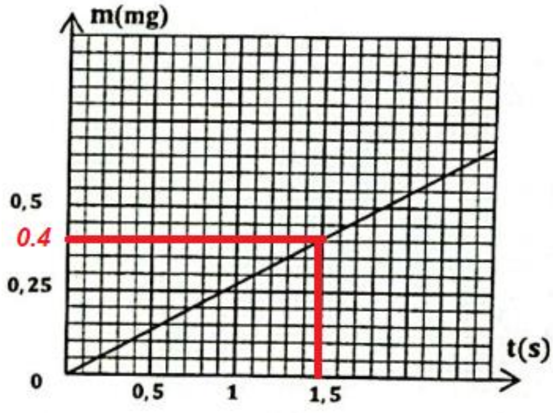


Figure 2

Partie 2 : Étude d'une solution d'éthanoate de sodium

1. Étude de la solution S

1-1. Taux d'avancement final τ (0,75 pt)

Expression de la conductivité :

$$\sigma = \lambda_{\mathrm{Na}^+}[\mathrm{Na}^+] + \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-}[\mathrm{CH_3COO}^-] + \lambda_{\mathrm{HO}^-}[\mathrm{HO}^-]$$

Avec :

$$[\mathrm{Na}^+] = C, \quad [\mathrm{CH_3COO}^-] = C - x_f, \quad [\mathrm{HO}^-] = x_f$$

On obtient :

$$\sigma = \lambda_{\mathrm{Na}^+} C + \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-}(C - x_f/V) + \lambda_{\mathrm{HO}^-} x_f/V$$

En factorisant :

$$\sigma = C(\lambda_{\mathrm{Na}^+} + \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-}) + x_f/V(\lambda_{\mathrm{HO}^-} - \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-})$$

Et

$$C(\lambda_{\mathrm{Na}^+} + \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-}) = 0{,}91\ \mathrm{S.m^{-1}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_{\mathrm{HO}^-} - \lambda_{\mathrm{CH_3COO}^-} = 15{,}8\ \mathrm{mS.m^2.mol^{-1}}$$

$$\frac{x_f}{V} = \frac{\sigma - 0{,}91}{15{,}8}$$

Finalement :

$$\tau = \frac{x_f}{C.V} = \frac{\sigma - 0{,}91}{C.15{,}8} = \boxed{\frac{\sigma - 0{,}91}{1{,}58}}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{0{,}910125 - 0{,}91}{1{,}58} = \boxed{7{,}9 \times 10^{-5}}$$

1-2. Calcul du pK_A(0,75 pt)

$$\mathrm{CH_3COO^-} + H2O \rightarrow \mathrm{CH_3COOH} + \mathrm{HO^-}$$

$$\mathrm{K} = \frac{[\mathrm{CH_3COOH}][\mathrm{HO^-}]}{[\mathrm{CH_3COO^-}]} = \frac{C(\tau)^2}{(1-\tau)}$$

Et

$$K_A = \frac{[\mathrm{CH_3COO^-}].[\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{CH_3COOH}]} = \frac{[\mathrm{CH_3COO^-}].[\mathrm{H_3O^+}].[\mathrm{HO^-}]}{[\mathrm{CH_3COOH}].[\mathrm{HO^-}]} = \frac{K_e}{\mathrm{K}}$$

$$pK_A = -\log K_A = \log\left(\frac{C(\tau)^2}{K_e(1-\tau)}\right) = \boxed{4{,}8}$$

2. Étude de la solution S_1

2-1. Concentration C_1 (0,25 pt)

$$C_1 = \frac{m_1}{M \times V_1} = \frac{0{,}328}{82 \times 0{,}020} = \boxed{0{,}2\ \mathrm{mol.L^{-1}}}$$

2-2. Taux d'avancement τ_1(0,5 pt)

On a $\tau_1 \ll 1$ et $pK_A = \log\left(\frac{C_1(\tau_1)^2}{K_e(1-\tau_1)}\right)$

$$pK_A = \log\left(\frac{C_1(\tau)^2}{K_e}\right) = -\log\left(\frac{K_e}{C_1(\tau)^2}\right)$$

$$K_A = \frac{K_e}{C_1(\tau_1)^2}$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{K_e}{K_A \times C_1}} = \sqrt{\frac{10^{-14}}{10^{-4,8} \times 0,2}} = \boxed{5,6 \times 10^{-5}}$$

2-3. Comparaison τ_1 et τ (0,75 pt)

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{5,6 \times 10^{-5}}{7,9 \times 10^{-5}} = 0,7$$

$$\tau_1 < \tau$$

Conclusion : Le taux d'avancement **diminue** lorsque la concentration **augmente**.

3. Pureté du produit commercial

3-1. Équation de la réaction (0,25 pt)

$$\boxed{CH_3COO^- + H_3O^+ \rightarrow CH_3COOH + H_2O}$$

3-2-1. Démonstration de C_0 (1 pt)

	$CH_3COO^- + H_3O^+ \rightarrow CH_3COOH + H_2O$			
Initial	C_0V_0	C_AV_A		
Final	0	$C_AV_A - C_0V_0$		

Les ions H_3O^+ restants sont dosés :

$$C_AV_A - C_0V_0 = n_{res}(H_3O^+) = C_BV_{BE}$$

$$C_0 = \frac{C_AV_A - C_BV_{BE}}{V_0} = \boxed{0,09 \text{ mol.L}^{-1}}$$

Masse réelle :

$$m = C_0 \times V_0 \times M = 0,09 \times 0,020 \times 82 = \boxed{147,6 \text{ mg}}$$

3-2-2. Pureté du produit (0,5 pt)

$$\text{Pureté} = \frac{m}{m_0} \times 100 = \frac{147,6}{164} \times 100 = \boxed{90\%}$$

Exercice 2 : Écoulement silencieux dans une conduite

1. Cas où l'eau est au repos

1-1. Vitesse v_0 des ondes ultrasonores (0,25 pt)

$$v_0 = \frac{L}{t_1} = \frac{1,0}{667 \times 10^{-6}} \approx \boxed{1\,500 \text{ m/s}}$$

1-2. Longueur d'onde λ (0,25 pt)

$$\lambda = \frac{v_0}{N} = \frac{1\,500}{50 \times 10^3} = \boxed{0,03 \text{ m} = 3 \text{ cm}}$$

2. Cas où l'eau s'écoule (E vers R)

2-1. Expression de τ (0,5 pt)

La vitesse résultante des ondes est $v = v_0 + v_e$.
Le temps de propagation devient :

$$t_2 = \frac{L}{v_0 + v_e}$$

Différence de temps :

$$\tau = t_1 - t_2 = \frac{L}{v_0} - \frac{L}{v_0 + v_e} = L\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0 + v_e}\right)$$

$$\boxed{\tau = L\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_0 + v_e}\right) = \frac{L.v_e}{(v_0 + v_e).v_0}}$$

2-2. Calcul de v_e (0,5 pt)

Avec $\tau = 0{,}280 \times 10^{-6}$ s :

$$0{,}280 \times 10^{-6} = 1{,}0\left(\frac{1}{1\,500} - \frac{1}{1\,500 + v_e}\right)$$

$$v_e \approx \boxed{0{,}63\ \text{m/s}}$$

2-3. Diamètre pour écoulement silencieux (0,5 pt)

Formule de Croquelois avec $v_s = v_e = 0{,}63$ m/s :

$$0{,}63 = \sqrt{0{,}02d} \Longrightarrow d = \frac{0,63^2}{0{,}02} = \boxed{19{,}8\ \text{mm}}$$

Exercice 3 : Désintégration du radium 226

1. Équation de désintégration (0,25 pt)

La désintégration α du radium 226 s'écrit :

$$\boxed{{}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{A}_{Z}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}}$$

Détermination de A et Z

Par conservation des nombres de masse et de charge :

$$\begin{aligned} 226 &= A + 4 \Rightarrow A = 222 \\ 88 &= Z + 2 \Rightarrow Z = 86 \end{aligned}$$

Équation finale :

$$\boxed{{}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}}$$

2. Étude de l'échantillon de radium

2-1. Nombre initial de noyaux N_0 (0,25 pt)

$$N_0 = \frac{m_0}{M} \times N_A = \frac{1,0}{226} \times 6,02 \times 10^{23} = \boxed{2,66 \times 10^{21} \text{ noyaux}}$$

2-2. Loi de décroissance radioactive (0,25 pt)

La loi de décroissance s'écrit :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}$$

En remplaçant :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{t_{1/2}}t} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}$$

$$\boxed{N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_{1/2}}}}$$

2-3. Énergie libérée (0,75 pt)

Défaut de masse et énergie par désintégration

$$\Delta m = m(\text{Ra}) - [m(\text{Rn}) + m(\alpha)] = 225,9770 - (221,9703 + 4,0015) = 0,0052\, u$$

$$E_0 = |\Delta m \times 931,5| = 0,0052 \times 931,5 = \boxed{4,84\, MeV}$$

Nombre de désintégrations en $3t_{1/2}$

$$N_{\text{restant}} = N_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{N_0}{8}$$

$$N_{\text{désintégrés}} = N_0 - \frac{N_0}{8} = \frac{7}{8} N_0 = 2,33 \times 10^{21} \text{ noyaux}$$

Énergie totale libérée

$$E_{\text{tot}} = N_{\text{désintégrés}} \times E_0 = 2,33 \times 10^{21} \times 4,84\, MeV$$

$$E_{\text{tot}} = 1,13 \times 10^{22}\, MeV = 1,13 \times 10^{22} \times 1,6 \times 10^{-13}\, J = \boxed{1,81 \times 10^{9}\, J}$$

Exercice 4 : Électricité (4,25 points)

Partie 1 : Détermination de la capacité C_1

1-1. Établissement de l'équation différentielle (0,5 pt)

On a

$$E = u_{C_1} + u_{C_2} + u_R$$

Et

$$q = C_1 u_{C_1} = C_2 u_{C_2} \Rightarrow u_{C_1} = \frac{C_2}{C_1} u_{C_2}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

$$u_R = Ri = RC_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

$$E = \frac{C_2}{C_1} u_{C_2} + u_{C_2} + RC_2 \frac{du_{C_2}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{du_{C_2}}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} u_{C_2} = \frac{E}{RC_2}}$$

Les deux condensateurs C_1 et C_2 sont en série, donc la capacité équivalente C_e est donnée par :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Longrightarrow C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\boxed{\frac{du_{C_2}}{dt} + \frac{1}{RC_e} u_{C_2} = \frac{E}{RC_2}}$$

1-2. Résolution de l'équation différentielle (0,5 pt)

Solution générale :

$$u_{C_2}(t) = A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Détermination des constantes :

- À t → ∞ : on a $\frac{du_{C_2}}{dt} = 0 \; et \; alors \;\; u_{C_2} = \frac{EC_1}{C_1+C_2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{EC_1}{C_1+C_2}}$

On a: $\frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{A}{\tau}.e^{-t/\tau}$

$$\frac{A}{\tau}.e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC_e}.A\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{E}{RC_2}$$

$$\frac{A}{\tau}.e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC_e}.A - \frac{1}{RC_e}.Ae^{-t/\tau} = \frac{E}{RC_2}$$

$$(\frac{1}{\tau}.-\frac{1}{RC_e})Ae^{-t/\tau}+\frac{1}{RC_e}.A=\frac{E}{RC_2}$$

$$\frac{1}{\tau}.-\frac{1}{RC_e}=0 \text{ et } \frac{1}{RC_e}.A=\frac{E}{RC_2}$$

Finalement : $\boxed{\tau=\frac{RC_1C_2}{C_1+C_2}}$

1-3. Expression de $u_R(t)$ (0,5 pt)

$$\begin{aligned} u_R(t) &= Ri(t) = RC_2\frac{du_{C_2}}{dt} \\ &= RC_2\left(\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}\right) \\ &= RC_2\left(\frac{EC_1}{C_1+C_2}\cdot\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}e^{-t/\tau}\right) \\ &= \boxed{Ee^{-t/\tau}} \end{aligned}$$

1-4. Analyse des courbes (0,25 pt)

$$u_R(t)=Ee^{-t/\tau}$$

$$\ln(u_R)=\ln E-\frac{t}{\tau}$$

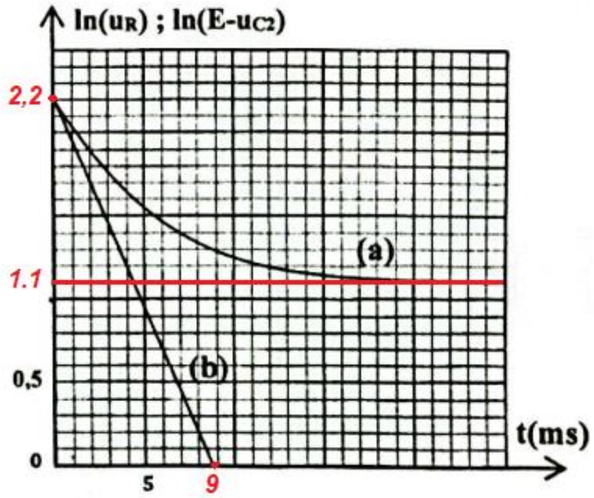
- Courbe (a) - Droite linéaire : $\boxed{\ln(u_R)=\ln E-\frac{t}{\tau}}$
- Courbe (b) : $\ln(E-u_{C_2})$

1-5. Détermination des paramètres (0,75 pt)

Tension E :

On a à t=0 **:** $u_R(t=0)=E$

$\ln(u_R(t=0))=\ln(\mathrm{E})=2{,}2\Rightarrow E=e^{2{,}2}\approx\boxed{9\,\mathrm{V}}$



1. **Constante de temps τ :**

   $$\text{Pente}=-\frac{1}{\tau}=\frac{0-2{,}2}{9\times10^{-3}}\Rightarrow\tau\approx\boxed{4{,}1\,\mathrm{ms}}$$

2. **Capacité C_1 :**

   D'après la courbe lorsque t → ∞ **:** $\ln(E-u_{C_2})=1.1$

   $$E-u_{C_2}(t)=\mathrm{E}-\frac{EC_1}{C_1+C_2}(1-e^{-\infty})=\frac{EC_2}{C_1+C_2}$$

   $$\ln\left(\frac{EC_2}{C_1+C_2}\right)=1.1$$

$$\frac{EC_2}{C_1 + C_2} = e^{1,1} \approx 3,0 \Rightarrow C_1 = \boxed{4\,\mu\text{F}}$$

2 : Détermination de l'inductance L

2-1. Équation différentielle (0,5 pt)

$$u_c + u_L = 0 \quad \Longrightarrow u_{c2} = -u_L$$

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

$$= \text{L}C_2\frac{d^2u_{c2}}{dt^2} = -\text{L}C_2\frac{du_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{1}{LC_2}u_L = 0}$$

2-2. Calcul de L (0,25 pt)

$$T = 2\pi\sqrt{LC_2} \Rightarrow L = \frac{T^2}{4\pi^2 C_2} = \boxed{0{,}05\text{ H}}$$

2-3. Énergie à t=1,5ms (0,25 pt)

L'énergie stockée dans un condensateur est : $E_C = \frac{1}{2}C_2u_{C_2}^2(\text{t} = 1{,}5\text{ms})$

D'après la figure 3 : $u_L(1.5\,ms) = 0\,V$,

Et $u_{C_2} = -u_L$

Donc : $E_C = \frac{1}{2}C_2u_{\text{L}}^2(\text{t} = 1{,}5\text{ms}) = 0$

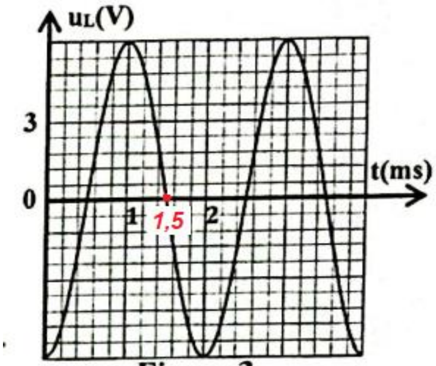


Figure 3

Partie 2 : Oscillations forcées dans un circuit RLC série

1. Montrer que le circuit est en état de résonance électrique (0,25 pt)

À la résonance dans un circuit RLC série, le courant est en phase avec la tension du générateur.
On observe sur l'oscillogramme (Figure 5) que les courbes $u(t)$ et $u_R(t)$ sont sinusoïdales et **en phase**.

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{2\pi}{T}.\tau = 0}$$

Le circuit est en état de résonance électrique.

2. Calcul de la valeur de C et celle de r (0,5 pt)

a) Calcul de la capacité C

À la résonance, la pulsation propre du circuit est donnée par :

$$N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

D'après l'oscillogramme, la période est :

$$T = 2\text{ ms} = 2\pi\sqrt{LC}$$

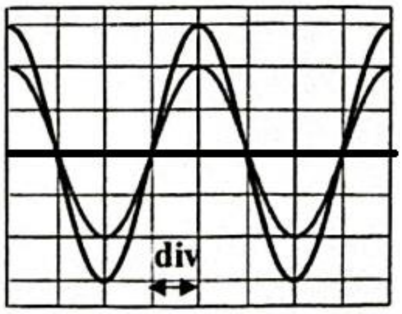


Figure 5

$$C = \frac{1}{L}(\frac{T}{2\pi})^2$$
$$C = 5{,}07 \times 10^{-7}\,\text{F} \simeq 0{,}5\mu\text{F}$$

b) Calcul de la résistance interne r

On observe sur l'oscillogramme :

- Amplitude de $u(t)$: 3 divisions
- Amplitude de $u_R(t)$: 2 divisions

On a $U_R = R.I$

À la résonance $\text{U} = (R + r)I$

Donc :

$$\frac{U_R}{U} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{R}{R+r} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3R = 2(R+r) \Rightarrow 3R = 2R + 2r \Rightarrow R = 2r \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

Avec $R = 20\,\Omega$, on obtient :

$$r = \frac{20}{2} = 10\,\Omega$$

Exercice 5 : Mécanique (5,25 points)

Partie 1 : Chute verticale du sportif

1-1. Établissement de l'équation différentielle (0,5 pt)

- Masse du sportif : $m = 70$ kg
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8$ m/s^2
- Force de frottement : $\vec{f} = -\lambda v^n \vec{k}$

Appliquer le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v^n$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{m}v^n$$

1-2. Transformation logarithmique (0,5 pt)

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{m}v^n$$

$$\frac{\lambda}{m}v^n = g - \frac{dv}{dt}$$

$$\ln\left(\frac{\lambda}{m}\right) + n\ln(v) = \ln\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\boxed{n\ln(v) = \ln\left(\frac{m}{\lambda}\right) + \ln\left(g - \frac{dv}{dt}\right)}$$

1-3. Exploitation de la courbe $\frac{dv}{dt} = f(v)$

1-3-1. Vitesse limite v_t (0,25 pt)

- En régime permanant, $\frac{dv}{dt} = 0$
- D'après la courbe, $\frac{dv}{dt} = 0$ pour $v = 32$ m/s

$$\boxed{v_l = 32 \text{ m/s}}$$

1-3-2. Détermination de n (0,5 pt)

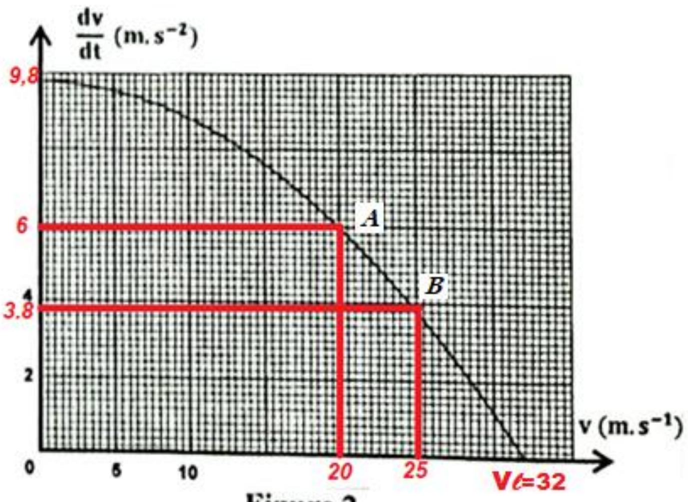


Figure 2

Points utilisés :

- Point A : $(v_1, a_1) = (20{,}6)$
- Point B : $(v_2, a_2) = (25; 3{,}8)$

Écrire les équations pour chaque point :

$$\begin{cases} 6 = 9{,}8 - \dfrac{\lambda}{70} \times 20^n \\ 3.8 = 9{,}8 - \dfrac{\lambda}{70} \times 25^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{70} \times 20^n = 3.8 \\ \dfrac{\lambda}{70} \times 25^n = 6 \end{cases}$$

$$\left(\frac{25}{20}\right)^n = \frac{6}{3.8} \Rightarrow (1.25)^n \approx 1.58$$

$$n = \frac{\ln(1.58)}{\ln(1.25)} \approx \boxed{2}$$

1-3-3. Calcul de λ (0,25 pt)

Utiliser la vitesse avec $n = 2$:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{m} v^n$$

$$0 = 9{,}8 - \frac{\lambda}{70} \times 32^2$$

$$\lambda = \frac{70 \times 9.8}{34^2} \approx \boxed{0.67 \text{ kg/m}}$$

1-4. Méthode d'Euler

t (s)	v (m/s)	a (m/s^2)
0.00	0.00	9.80
0.20	1.96	9.77
0.40	v_2	9.67
0.60	v_3	a_3

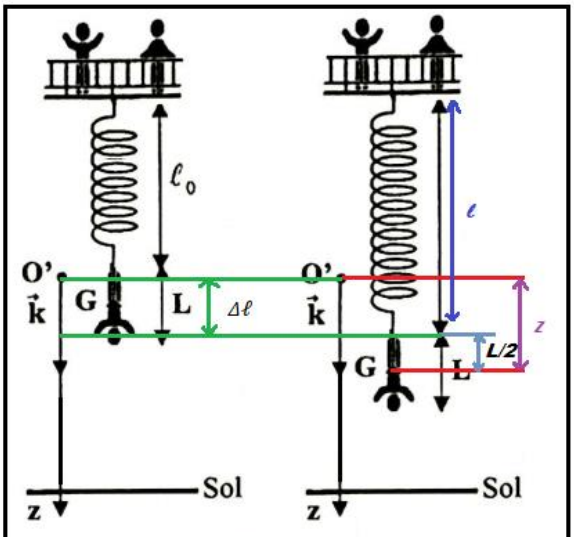


Figure 3

Calcul de v_2 :

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t = 1.96 + 9.77 \times 0.20 \approx \boxed{3.91 \text{ m/s}}$$

Calcul de a_3 :

$$a_3 = 9.8 - \frac{0.67}{70} \times 3.91^2 \approx \boxed{9.47 \text{ m/s}^2}$$

Calcul de v_3 :

$$v_3 = v_2 + a_2 \Delta t = 3.91 + 9.67 \times 0.20 \approx \boxed{5.84 \text{ m/s}}$$

Partie 2 : Étude théorique de la phase de freinage

2-1. Expression de l'énergie potentielle (0,5 pt)

Dérivation complète :

Énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K (\Delta\ell)^2 + Cte$$

$$E_{pe} = 0 \; lorsque \; \Delta\ell = 0 \; \Rightarrow Cte = 0$$

où $\Delta\ell = (\ell_0 + z) - (\ell_0 + \frac{L}{2}) = z - \frac{L}{2}$

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K \left(z - \frac{L}{2}\right)^2$$

Énergie potentielle de pesanteur (référence en $z_{ref} = \frac{L}{2}$) :

$$E_{pp} = -mg(z - z_{ref}) = -mg\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

Remarque : (le signe (-) vient de l'orientation de l'axe vers le bas)

Énergie potentielle totale :

$$E_p = E_{pe} + E_{pp} = \frac{1}{2} K \left(z - \frac{L}{2}\right)^2 - mg\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

2-2. Analyse du freinage élastique

2-2-1. Conservation de l'énergie mécanique (0,5 pt)

Conservation de l'énergie :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\left(z - \frac{L}{2}\right)^2 - mg\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

Lorsque $v = v_0$ on a $\ell = \ell_0 \Longrightarrow E_p = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}\,mv_0^2$

Lorsque $v = 0$ on a $\Delta\ell = \Delta\ell_{max} = d \;\; \Longrightarrow E_c = 0$ et $E_p = \frac{1}{2}K(d)^2 - mg(d)$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Kd^2 - mg\mathrm{d}$$

$$\boxed{mv_0^2 = Kd^2 - 2mgd}$$

2-2-2. Expression de l'allongement maximal (0,75 pt)

$$Kd^2 - 2mgd - mv_0^2 = 0$$

$$\Delta = (2mg)^2 + 4Kmv_0^2 = 4m^2g^2 + 4Kmv_0^2$$

$$d = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 + 4Kmv_0^2}}{2K}$$

$$d = \frac{2mg \pm 2\sqrt{m^2g^2 + Kmv_0^2}}{2K}$$

$$d = \frac{mg}{K} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{K^2} + \frac{mv_0^2}{K}}$$

Solution positive :

$$\boxed{d = \frac{mg}{K} + \sqrt{\frac{m^2g^2}{K^2} + \frac{mv_0^2}{K}}}$$

2-2-3. Vérification pour K = 50 N/m (0,5 pt)

$$d = \frac{70 \times 9{,}8}{50} + \sqrt{\left(\frac{70 \times 9{,}8}{50}\right)^2 + \frac{70 \times (20)^2}{50}}$$

$$d \approx 41{,}07\ \mathrm{m}$$

Hauteur totale H :

$H = \ell_0 \; + d \; + L$

$H = 60 \; + 41{,}02 \; + 1.7 = 102{,}72\ \mathrm{m}$

$\boxed{\text{Le sportif touche le sol (h=102 m < H=102,72 m m)}}$

2-3. Détermination de la raideur minimale sécurisée (0,5 pt)

Condition de sécurité complète :

$$\ell_0 + d + L \leq h$$

$$60\,\text{m} + d + 1.70\,\text{m} \leq 102\,\text{m}$$

$$d \leq 102\,\text{m} - 61.70\,\text{m}$$

$$\boxed{d \leq 40.30\,\text{m}}$$

En prend $d_{min} = 40.30\,\text{m}$

La valeur minimale de raideur :

$$mv_0^2 = K_{\text{min}} {d_{min}}^2 - 2mgd_{min}$$

$$mv_0^2 + 2mgd_{min} = K_{\text{min}} {d_{min}}^2$$

$$\frac{mv_0^2 + 2mgd_{min}}{{d_{min}}^2} = K_{\text{min}}$$

$$K_{\text{min}} = 51.3\,\text{N/m}$$